This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

UC-NRLF
$B 285 987

Digitized by Google

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Class

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ÉTUDE

SUR

L'ESPACE ET LE TEMPS

Digitized by Google

Digitized by Google

1851

ÉTUDE

SUR

L'ESPACE ET LE TEMPS

PAR

GEORGES LECHALAS

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

PARIS

ANCIENNE LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET Cie

FÉLIX ALCAN, ÉDITEUR

108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

1896

Tous droits réservés

Digitized by Google

BD632
L4

GENERAL

Digitized by Google

M9

ÉTUDE SUR L'ESPACE & LE TEMPS

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

INTRODUCTION

Les questions de l'espace et du temps sont à la fois liées d'une façon étroite, au point de vue de la genèse de leurs notions dans notre esprit, ainsi que de leur étude scientifique, et analogues, jusqu'à un certain point, en ce qui concerne les difficultés d'ordre métaphysique qu'elles soulèvent. Les séparer, c'est donc s'exposer à mutiler certains exposés ou à introduire, d'une façon subreptice, des considérations qui gagneraient à être abordées ouvertement. De là, la réunion de deux sujets qui, pour être étudiés un peu complètement, exigeraient pourtant des développements tels que chacun d'eux devrait faire l'objet d'un travail beaucoup plus étendu que celui que nous entreprenons.

N'ayant donc aucunement la prétention de traiter la totalité de ce double sujet, nous devons indiquer dès maintenant, d'une façon sommaire, les points sur lesquels nous comptons fixer notre attention, afin qu'on sache ce qu'on peut espérer trouver dans le présent volume et aussi ce qu'on ne devra pas y chercher.

Convaincu que la connaissance scientifique d'un sujet est un préliminaire à peu près indispensable à son étude proprement philosophique, nous commencerons par envi-

104950

Digitized by Google

sager les sciences de l'espace et du temps : la première est la géométrie, et la seconde la mécanique [1]. Il est bien vrai que celle-ci fait abstraction du temps psychologique ; mais, de celui-ci, on n'a pu encore établir une science véritable. D'autre part, et en vertu même de cette abstraction, le temps de la mécanique apparaît dans une dépendance essentielle de l'espace, dépendance à laquelle on doit bien se garder d'attribuer une trop grande portée, en l'étendant d'une façon absolue, comme on l'a fait souvent, au temps psychologique. Ayant ainsi reconnu à l'avance le caractère incomplet de la science du temps, telle que nous l'envisagerons, nous éviterons plus aisément les conséquences prématurées ou trop générales que nous pourrions être porté à en tirer.

Nous débuterons donc par un chapitre consacré à l'espace géométrique. Beaucoup penseront, sans doute, que le sujet est assez connu ou d'un ordre trop technique pour être bien en situation ; mais il y a des points controversés dont la portée philosophique est considérable : telle est la question de la relativité des grandeurs en géométrie, relativité qui, longtemps non discutée, s'est trouvée mise en doute à la suite de la création des géométries non euclidiennes. Or, le caractère et la légitimité de ces géométries font encore l'objet de discussions ardentes, qui rendent indispensable un examen sérieux des bases sur lesquelles elles reposent [2]. Cet examen, pour être complet, devrait être appuyé sur des développe-

1. Nous ne nous dissimulons pas que l'étude expérimentale des conditions dans lesquelles se développent en nous les notions d'espace et de temps est du plus haut intérêt et aurait pu, sans doute, nous fournir de précieuses indications ; mais nous n'avons pas cependant éprouvé, d'une façon pressante, le besoin de faire appel à cette partie si curieuse de la psychologie. Aussi nous sommes-nous décidé à la passer sous silence.

2. Certains de nos lecteurs ont peut-être eu connaissance de quelques articles que nous avons précédemment consacrés à ce

Digitized by Google

ments techniques auxquels nous devons renoncer, en sorte que nous nous bornerons à étudier les sources de la géométrie, à préciser les caractères de la géométrie euclidienne et à exposer les lignes d'ensemble de la géométrie générale, dont nous essaierons de préciser la valeur et la portée philosophique.

Après avoir ensuite considéré le temps dans la mécanique, nous examinerons si cette science permet de reconnaître l'existence d'un mouvement absolu, c'est-à-dire, en un sens, d'un espace absolu, non au point de vue des dimensions, mais à celui de la situation des corps. Puis, nous examinerons dans quelle mesure la science expérimentale permet de reconnaître quelle est la géométrie de notre univers.

Ayant ainsi traité les questions scientifiques fondamentales rentrant dans notre cadre, nous soumettrons les résultats obtenus à l'épreuve de deux problèmes, ceux des mondes semblables et de la réversibilité du monde physique.

Arrivant alors aux questions d'ordre métaphysique, nous y préluderons par la critique de l'infini et du continu, laquelle conduit presque forcément à discuter les arguments de Zénon d'Élée sur le mouvement. Le plan de notre travail exigerait alors un essai d'explication de la nature intime de l'espace ; mais nous nous avouerons impuissant à résoudre ce problème, et nous nous bornerons à balbutier, pour ainsi

sujet. Nous les prierons de lire néanmoins notre nouvel exposé, attendu que si, dans l'ensemble, nos idées n'ont pas varié, il est des points d'une importance considérable que nous modifierons à la suite des objections qui nous ont été opposées et des réflexions que nous n'avons cessé de faire sur ce sujet.

Nous répéterons, d'ailleurs, que nous avons été initié à ces géométries par notre ami, M. Calinon, auquel, sans vouloir l'engager sur tel ou tel détail, nous sommes heureux de rapporter tout ce qu'il pourra y avoir de bon dans notre exposé.

Digitized by Google

dire, quelques aperçus sur ce sujet. Plus heureux, ou du moins plus hardi à l'égard du temps, nous nous hasarderons à développer certaines théories trop négligées de Kant et de Balmès.

On aura remarqué que nous avons parlé le langage d'un réaliste, et il est vrai que l'hypothèse de l'existence d'un monde extérieur nous paraît plus vraisemblable que l'hypothèse idéaliste ; mais on sait que la plupart des énoncés réalistes se prêtent fort bien à une traduction idéaliste, en sorte que notre travail sera, nous l'espérons, loin de présenter un caractère trop étroitement systématique.

Digitized by Google

CHAPITRE PREMIER

L'ESPACE GÉOMÉTRIQUE

A quelque système de géométrie que l'on s'attache, qu'il s'agisse de la géométrie euclidienne la plus classique ou de la géométrie générale, au sens le plus étendu du mot, il est indispensable de reconnaître avec précision les éléments des démonstrations constitutives de cette science.

I

LES BASES DE LA DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

On doit, d'abord, mettre à part les *définitions*, dont la nécessité ne peut faire l'objet d'un doute, puisqu'il faut bien savoir de quoi l'on parle. Mais la discussion s'engage quand on aborde les autres bases des démonstrations qui, si l'on s'en rapporte aux *Éléments* d'Euclide, comprennent des *axiomes*, énonçant des rapports entre des quantités indéterminées et des *demandes* ou *postulats*, véritables théorèmes non démontrés. A ces éléments des démonstrations, énoncés, mais non pas tous admis par M. Liard, dans son traité si précieux des *Définitions géométriques et des défini-*

Digitized by Google

tions empiriques, nous ajouterons les grands principes essentiels de la raison, ceux de contradiction, d'identité et de raison suffisante. Étudions ces divers éléments de la démonstration géométrique.

Comme nous l'avons dit, on ne saurait, avec quelque apparence de raison, prétendre exclure les définitions des bases de la démonstration ; mais on est loin d'être d'accord sur les caractères d'une bonne définition. M. Liard affirme sans réserve que « la définition géométrique doit exprimer la génération de la figure à définir [1] » ; en cela, il ne fait que répéter l'enseignement d'un penseur que nous combattrons plus d'une fois, mais qui fait preuve souvent d'une profondeur exceptionnelle : M. Delbœuf répète, en effet, pour ainsi dire à satiété, que la définition *génétique* est seule valable [2]. Mais ce dernier philosophe a vu, sans en tirer tout le parti désirable, que, cela étant, tous les faits ne peuvent se définir (p. 37) [3] ; alors, on est amené à reconnaître que, si la définition doit, en général, être génétique, il en est un petit nombre de fondamentales qui, ne pouvant reposer sur la génération, doivent consister dans l'énoncé d'une propriété caractéristique, attendu que toute construction repose sur la connaissance présupposée d'une autre figure. Mais alors une remarque essentielle s'impose : lorsqu'une définition est constructive, elle permet d'établir la possibilité de la figure définie, pourvu du moins que les éléments employés dans la construction soient eux-mêmes possibles. Or, nous venons de voir que les derniers éléments ne peuvent essentiellement être définis *per genera-*

1. P. 68.
2. *Prolégomènes philosophiques de la géométrie*, p. 37, 94, 124, 178.
3. M. Rabier, qui tient aussi pour les définitions exclusivement constructives, admet cependant qu'on peut définir une figure par sa propriété essentielle ; mais il le fait incidemment et sans paraître se rendre compte qu'au début c'est une nécessité (*Logique*, p. 285).

Digitized by Google

tionem, d'où il résulte que toute la géométrie apparaît comme reposant sur des définitions hypothétiques, dont la seule justification semble résulter de ce que, en prenant ces définitions comme point de départ, on peut pousser la déduction aussi loin que l'on veut sans rencontrer de contradiction. Il est clair qu'un tel *criterium* ne peut jamais donner une certitude, puisqu'on peut toujours supposer qu'en poursuivant plus longtemps la chaîne des déductions on arriverait à une contradiction [1]. On a été jusqu'à dire qu'il est possible de construire une science parfaitement enchaînée d'un bout à l'autre, en l'appuyant sur des prémisses fausses *quelconques* ; mais M. Delbœuf a réfuté cette thèse paradoxale de Dugald-Stewart, au moyen de quelques exemples topiques (p. 77, note 1), ce qui ne l'empêche pas de contester formellement que la déduction rigoureuse d'un système prouve rien quant à la vérité des prémisses. Nous discuterons la valeur de cette manière de voir en traitant de la géométrie générale, et, en même temps, nous montrerons comment l'analyse permet, pour cette géométrie comme pour la géométrie euclidienne, d'affirmer que la suite des déductions ne présentera jamais de contradiction. Pour l'instant, il nous suffit d'avoir établi la nature des définitions fondamentales de la géométrie.

Que les définitions soient, à elles seules, impuissantes à fournir des démonstrations, c'est ce qu'il est superflu de développer, car il est clair que les principes d'identité et de contradiction (à supposer qu'ils soient distincts) font la force des syllogismes, quel qu'en soit l'objet.

1. M. Milhaud va jusqu'à dire que la géométrie non euclidienne constitue simplement une tentative infructueuse, sans importance, de démonstration du postulatum par l'absurde (*Revue philosophique*, t. XXV, p. 622). Sa thèse sur *les Conditions et les limites de la certitude logique* montre que sa manière de voir ne s'est pas modifiée.

Digitized by Google

Mais il ne sera peut-être pas inutile de faire remarquer que, le cas échéant, on ne devrait pas hésiter à s'appuyer sur le principe de raison suffisante. Ce n'est pas à dire que son emploi ne présente de sérieuses difficultés et n'expose le géomètre à formuler des jugements hâtifs ; mais il n'en reste pas moins vrai que, lorsque non seulement on ne voit pas de raison pour qu'une chose ait lieu, mais qu'on voit clairement qu'il ne saurait y en avoir, on peut affirmer sans crainte d'erreur que cette chose n'est pas. M. Renouvier a justement reconnu cette importance du principe de raison suffisante en mathématiques [1], et nous verrons plus loin, sur un exemple, comment il doit et ne doit pas être appliqué.

Les axiomes sont des propositions de la science générale des grandeurs ou quantités que l'on déclare généralement indémontrables, bien que des penseurs tels que MM. Renouvier et Rabier les tiennent pour exclusivement analytiques. A nous en tenir strictement à notre sujet, nous n'avons pas à discuter ce caractère d'indémontrabilité, car ces propositions n'appartiennent pas en propre à la géométrie. Nous indiquerons toutefois, sommairement, sur un exemple, comment on peut essayer de les faire reposer sur le principe de raison suffisante, quand on ne voit pas le moyen de les déduire du principe d'identité.

Soit l'axiome : *Si de deux quantités égales on retire une même quantité, les restes sont égaux.*

Aux termes de cette proposition, les deux objets considérés le sont exclusivement au point de vue de la quantité, et, dès lors qu'ils sont égaux, ils sont identiques à ce point de vue, et, par suite, si on leur fait subir une même modification, toujours au point de vue de la quantité, il ne saurait

1. *Traité de logique générale et de logique formelle*, 2e édit., t. II, p. 196.

Digitized by Google

évidemment y avoir de raison pour que l'un des résultats différât de l'autre, en quantité. Mais cela n'empêche évidemment pas que les deux objets diffèrent à un autre point de vue, celui de la forme par exemple ; toutefois, il est plus intéressant de considérer le cas où, la forme étant aussi la même, il y aurait égalité géométrique. Dans ce cas, pourrait-on raisonner comme nous venons de le faire ? Nous pouvons dire encore qu'il y a identité entre les deux objets, au point de vue géométrique ; mais nous n'avons pas le droit de dire que nous leur faisons subir une même modification, alors même que nous en retrancherions deux figures égales géométriquement, vu que la modification subie dépend de la situation de la partie enlevée : aucune objection de ce genre n'existait quand on n'envisageait que la pure quantité, dont les éléments sont indiscernables.

Le véritable caractère des axiomes étant ainsi reconnu, reste à savoir quel est leur rôle dans la démonstration. On sait que, depuis Locke, on a maintes fois soutenu la stérilité des axiomes, et cette opinion doit d'autant plus être discutée de près que MM. Lachelier et Liard la tiennent pour rigoureusement démontrée. Afin d'établir cette proposition, M. Lachelier considère la démonstration de l'égalité des angles opposés par le sommet, démonstration qui amène à envisager deux sommes d'angles égales à deux droits. Pour conclure de là l'égalité de ces deux sommes entre elles, s'appuie-t-on sur le premier axiome de Legendre : « Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles » ? Non seulement on devrait répondre négativement, mais il faudrait affirmer l'impossibilité de faire reposer un raisonnement correct sur cet axiome, qui ne saurait être la majeure d'aucun syllogisme. Si nous disons, en effet :

« Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles ;

Digitized by Google

« Or, les deux sommes d'angles considérées sont égales à deux droits ;

« Donc ces deux sommes sont égales entre elles, »

la conclusion n'est pas légitime, nous dit-on, parce qu'on est passé de l'idée d'une quantité indéterminée, dans la majeure, à une quantité déterminée, dans la mineure, en sorte qu'il n'y a pas de moyen terme unique, alors que c'est une règle absolue du syllogisme que le moyen terme soit le même dans la majeure et dans la mineure.

Il ne servirait évidemment de rien de remplacer « égales à deux droits » par « égales à une même troisième quantité », car cette expression serait prise dans un sens déterminé, et l'objection de M. Lachelier subsisterait [1]. Il faut donc aborder franchement la question de la validité du syllogisme ; or, il nous semble qu'il suffit de l'interpréter en extension pour reconnaître que cette validité est parfaite.

« La totalité des groupes de deux quantités égales à une même troisième est comprise dans la totalité des groupes de deux quantités égales entre elles ;

« Or, les deux sommes d'angles considérées sont un groupe de deux quantités égales à une même troisième ;

« Donc ces deux sommes sont comprises dans la totalité des groupes de deux quantités égales entre elles. »

Ici il paraît impossible de formuler une objection telle que celle que nous venons de voir, car la majeure et la mineure parlent également de groupes de deux choses dont chacune est égale à une quantité particulière. La validité du raisonnement nous semble évidente. Si, d'ailleurs, nous considérons la façon dont MM. Lachelier et Liard esquivent

1. Il nous semble que, pour cette raison, le développement en polysyllogisme donné par M. Rabier ne saurait convaincre les partisans de la thèse que nous combattons comme lui (*Logique*, p. 289).

Digitized by Google

le recours à l'axiome, nous nous trouvons confirmé dans la pensée qu'il intervient au moins implicitement : pour eux, quand on a remarqué l'égalité de chacune des deux sommes à deux droits, leur rapport d'égalité apparaît immédiatement. Nous ne prétendons pas, bien entendu, soutenir que, en pareil cas, l'esprit doive faire intervenir l'axiome de la façon que nous avons vue, ni même qu'il doive être formulé expressément; mais nous soutenons que c'est bien lui qui donne sa force à la conclusion : ce qui le prouve, c'est que, en pareil cas, ce serait faire preuve d'un esprit bien peu scientifique et peu philosophique que de s'arrêter à la valeur particulière des deux sommes : on constate que « c'est la même chose », pour employer une formule familière, et tout est là [1].

Nous arrivons maintenant à la question encore plus controversée des axiomes géométriques, ou postulats. Comme forme, ce sont de véritables théorèmes, car ils énoncent une propriété d'une figure particulière ; mais ils en diffèrent en ce qu'ils ne peuvent être démontrés. Il nous semble que, pour tout esprit non prévenu, l'existence de telles propositions au sein de la géométrie doit apparaître comme un véritable scandale.

Il est vrai qu'on a prétendu en établir *a priori* la nécessité, en s'appuyant sur ce que « la démonstration ne peut aller à l'infini ». Cette proposition est incontestable; mais faut-il en conclure, avec M. Rabier [2], qu'elle force à admettre des propositions indémontrables propres à la géométrie ? Nous ne le pensons pas, car, lui-même le reconnaît, ces

1. Sur cette question si importante, on trouvera la thèse de M. Lachelier, exposée et adoptée par M. Liard, dans son ouvrage déjà cité, p. 91 à 103.
2. *Logique*, p. 282 à 287.

Digitized by Google

axiomes ou postulats peuvent jouer, dans la démonstration, le même rôle que les définitions, et celles-ci, combinées avec les axiomes communs, fournissent tous les éléments nécessaires à des raisonnements. Nous verrons que, en effet, les postulats ne sont que des définitions méconnues, et tant qu'on ne leur restitue pas ce caractère, on est amené logiquement, comme l'ont été d'innombrables géomètres, à en chercher des démonstrations, bien qu'il soit prouvé, nous le verrons, que ce but est impossible à atteindre en partant des définitions qui servent communément de base à la géométrie. Le vice de ces définitions, nous le montrerons, consiste en ce qu'elles sont trop générales, que plusieurs surfaces, plusieurs lignes distinctes peuvent répondre à celles de la ligne droite et du plan. Or, s'il en est ainsi, il est clair qu'on ne pourra sortir de l'indétermination qu'en ajoutant après coup, sous forme de postulats, les propriétés caractéristiques complémentaires nécessaires pour préciser la ligne ou la surface qu'on a en vue.

Ces réflexions permettent d'écarter un malentendu auquel prête parfois la géométrie non euclidienne. Comment, dit-on souvent, pouvez-vous soutenir qu'il pourrait se faire que, par un point pris sur un plan, on pût mener une infinité de droites n'en rencontrant pas une autre située dans le même plan, ou que la somme des angles d'un triangle ne fût pas égale à deux droits? Cela doit être ou ne pas être, mais cela ne saurait dépendre de la fantaisie de personne, fût-ce de Dieu. Sans aucun doute; mais, si votre définition du plan répond à toute une classe de surfaces, votre définition de la droite à toute une classe de lignes, vous n'êtes pas en droit de vous étonner si les propriétés qui en découlent ne sont pas toutes déterminées.

Nous verrons, dans le troisième paragraphe de ce chapitre, ce qu'est la géométrie *générale* de cet ensemble de lignes et de surfaces; mais auparavant nous étudierons

Digitized by Google

les moyens de sortir de cette indétermination pour s'enfermer dans la géométrie euclidienne.

II

LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Étant données des définitions fondamentales incomplètes, c'est-à-dire qui répondent à un ensemble de surfaces et de lignes, alors qu'on prétend établir une géométrie unique, le mieux serait, sans doute, de reviser ces définitions pour les compléter ; mais l'idée était trop simple pour qu'on l'eût dès l'abord, et l'on a eu recours à un procédé des moins satisfaisants pour l'esprit : on a bien complété en réalité les définitions ; mais, au lieu de le faire sciemment et ouvertement, on a formulé un ou plusieurs théorèmes sans en donner la démonstration, et on les a déclarés évidents par eux-mêmes. En réalité, ainsi que nous le verrons dans le prochain paragraphe, il n'y a qu'un seul de ces théorèmes indémontrés ou postulats qui soit essentiel, celui que l'instinct général a qualifié entre tous de *postulatum d'Euclide*, malgré les protestations de ceux qui prétendent voir des postulats partout.

Ce postulatum essentiel se met généralement sous la forme suivante, un peu différente de l'énoncé d'Euclide, mais équivalente : *Étant donnés une ligne droite et un point extérieur, on peut mener par ce point, dans leur plan, une ligne droite unique qui ne rencontre pas la première.* Cet énoncé n'a rien d'obligatoire, en ce sens qu'il est beaucoup de propositions qui en découlent et dont on peut inversement le déduire. C'est ainsi qu'on peut le remplacer par le

Digitized by Google

théorème si connu d'après lequel *la somme des angles d'un triangle rectiligne est égale à deux droits;* mais ce dernier n'a rien d'*intuitif*, et l'on ne saurait guère se figurer en voir immédiatement la nécessaire vérité, tandis que l'imagination se prête assez bien à l'intuition du postulat des parallèles.

Toutefois, on avait si bien le sentiment que ce postulat n'était au fond qu'un théorème comme un autre qu'on s'est évertué, nous l'avons déjà dit, à le démontrer. Dans cette voie, toutes les tentatives furent et devaient être infructueuses ; mais on fut plus heureux quand on chercha simplement à remplacer le *postulatum* par un principe général plus satisfaisant pour l'esprit. Dans cette voie, Wallis fit voir qu'on peut postuler indifféremment le principe des parallèles ou l'existence de triangles semblables ; puis, Laplace généralisa la proposition en en faisant le postulat de la possibilité des figures semblables ou de la *relativité des dimensions* [1]. Nous estimons qu'il y a un vrai progrès à substituer cette conception générale à un postulat dont le choix apparaît comme singulièrement arbitraire. M. Delbœuf, en ses *Prolégomènes*, a vivement fait ressortir cette caractéristique de la géométrie classique d'être la seule où l'on puisse

1. Dans une note à son *Exposition du système du monde* (liv. V, chap. v), Laplace s'exprime ainsi : « Les tentatives des géomètres pour démontrer le *postulatum* d'Euclide sur les parallèles ont été jusqu'à présent inutiles. Cependant, personne ne révoque en doute ce *postulatum* et les théorèmes qu'Euclide en a déduits. La perception de l'étendue renferme donc une propriété spéciale, évidente par elle-même, et sans laquelle on ne peut rigoureusement établir les propriétés des parallèles. L'idée d'une étendue limitée, par exemple du cercle, ne contient rien qui dépende de sa grandeur absolue. Mais, si nous diminuons par la pensée son rayon, nous sommes portés invinciblement à diminuer, dans le même rapport, sa circonférence et les côtés de toutes les figures inscrites. Cette proportionnalité me paraît être un *postulatum* bien plus naturel que celui d'Euclide. »

Digitized by Google

majorer ou *minorer* une figure quelconque sans en modifier la forme, c'est-à-dire où celle-ci soit indépendante de la grandeur [1].

Mais cet éminent penseur a fait mieux encore, car il est arrivé, croyons-nous, à donner les véritables définitions devant servir de base à la géométrie euclidienne. Partant de cette idée que, selon une remarque de Hegel, la ligne droite et le plan sont d'abord des *intuitions* ou *représentations*, qu'il s'agit de remplacer par des *concepts* rendant possible l'édification de la théorie, il arrive, après une série de considérations où il nous serait difficile de le suivre, en raison des continuelles réserves que nécessiterait la constante négation implicite de la géométrie générale, à poser les définitions suivantes [2] :

« *Le plan est une surface homogène ;*

« *La droite est une ligne homogène ;*

« c'est-à-dire qu'une portion de plan *majorée* engendre « le même plan ; qu'une portion de droite *majorée* reproduit « la droite [3]. »

Préoccupé de sa théorie, d'après laquelle toute définition doit être génétique, M. Delbœuf cherche à conférer ce caractère à ces définitions, qui ne sont qu'énonciatives d'une propriété. L'infructueux effort qu'il fait dans ce but mérite d'appeler notre attention, car il l'amène à poser, sans s'en

1. *Prolégomènes*, p. 129-132.

2. P. 180. M. Delbœuf a repris l'exposé de la géométrie suivant ses principes dans la *Revue philosophique* (le commencement se trouve dans le numéro d'avril 1895).

3. Ainsi que l'indique M. Delbœuf dans un ouvrage postérieur, Ueberweg a fait remarquer que Leibniz (*Œuvres mathém.*, publiées par Gerhardt, Halle, 1858, 2e part., 1er vol., p. 183-211) avait donné une définition équivalente : *Recta est linea, cujus pars quævis est similis toti* (voir *Essai d'une logique scientifique*, p. 225, note 1). Mais il y a loin d'une définition donnée en passant à une théorie régulière, et la part de M. Delbœuf reste belle.

Digitized by Google

douter, le principe dont découlera toute la géométrie générale. « Comment engendrons-nous l'espace, dit-il? Nous pre-
« nons le plus petit espace possible, ce qui ne peut pas
« devenir moindre, la limite extrême de la contraction
« de l'espace ; puis, par le procès inverse, nous dila-
« tons, nous amplifions cet espace... Nous pouvons donc
« regarder l'homogénéité comme étant le caractère *géné-*
« *tique* de l'espace, du plan, de la droite. L'espace, le plan,
« la droite sont des déterminations qui s'engendrent d'une
« façon homogène. Qu'on prenne un solide, une surface,
« une ligne au moment où ils naissent, et que l'on continue
« leur mode de génération, le solide deviendra l'espace
« infini ; la surface, le plan infini ; la ligne, la droite
« infinie. »

Il n'est guère besoin d'insister sur ce que ces définitions ne sont génétiques que dans la forme et ne donnent point les moyens d'engendrer pratiquement leurs objets, de les *tracer*, comme dit M. Delbœuf lui-même en développant le sens du mot « génétique [1] ». Comment, en effet, se donner le plus petit espace, la plus petite surface, la plus petite ligne possibles, alors que tout espace, toute surface, toute ligne déterminés sont plus grands qu'une infinité d'autres ?

Ces définitions ne sont donc point génétiques, au sens vrai du mot, tel que M. Delbœuf lui-même l'a précisé ; mais ce n'est pas là un défaut pour les définitions fondamentales, puisqu'elles ne peuvent être qu'énonciatives d'une propriété caractéristique. A ce dernier point de vue, elles sont excellentes, bien qu'on leur ait fait un singulier reproche, que nous ne songerions point à mentionner si nous ne l'avions vu renouveler par un géomètre philosophe dont nous aurions attendu plus de clairvoyance. Ce reproche consiste à dire que la propriété énoncée n'est pas suffisam-

1. P. 94.

Digitized by Google

ment caractéristique, car la définition de la droite, par exemple, conviendrait à tous les cercles. Il est vrai qu'un arc de cercle majoré donne un autre arc de cercle ; mais ce nouvel arc de cercle ne reproduit point le premier, qui ne peut être superposé à aucune de ses parties.

Il est un autre reproche beaucoup plus sérieux qu'on pourrait formuler contre les définitions que nous discutons : pour majorer une figure, il faut savoir mesurer les lignes et les angles, et la même connaissance est nécessaire pour vérifier si une figure n'en est qu'une autre majorée, d'où il suit que ces définitions posées sans préambule manquent d'une base indispensable. Nous verrons, dans le paragraphe suivant, comment peuvent être résolues ces difficultés : quelque particulière que soit une géométrie, elle ne saurait reposer que sur la critique des notions fondamentales de toute géométrie.

Quoi qu'il en soit, M. Delbœuf s'est efforcé de montrer, souvent avec beaucoup de bonheur, que, en prenant ces définitions pour point de départ, la géométrie s'établit sans postulat; sans entrer dans une discussion détaillée, nous dirons simplement que la possibilité d'écarter ainsi toute proposition non démontrée nous paraît certaine, en vertu même de la géométrie générale, dans laquelle aucune ligne, aucune surface, aucun espace, en dehors des droite, plan et espace euclidiens, ne jouissent de l'*homogénéité* telle que la définit le professeur belge.

Aucun espace, venons-nous de dire; c'est que, en effet, par un coup de fortune comme il n'en arrive qu'aux esprits vraiment géniaux, l'illustre professeur de l'Université de Liège a mis le doigt (oh ! sans s'en douter et sans l'avouer encore aujourd'hui) sur l'idée fondamentale et maîtresse de la géométrie générale.

Digitized by Google

III

LA GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE

M. Delbœuf, nous venons de le voir, a été amené à donner trois définitions tout à fait analogues de la droite, du plan et de l'*espace*. Quelles sont les conséquences naturelles d'une telle conception? C'est que ce que nous appelons de ce dernier mot n'est qu'un cas particulier au milieu d'une infinité d'espaces à trois dimensions concevables, comme le plan et la droite sont des cas particuliers au milieu d'une infinité d'espaces à deux dimensions et à une dimension [1].

Une telle conception est absolument contraire à celle qui pose l'*espace* soit comme une entité nécessaire, en dehors de laquelle rien ne peut se concevoir, soit comme une forme *a priori* rigoureusement imposée à notre esprit. Partisan de cette dernière théorie, tout en parlant volontiers le langage réaliste de la première, M. Renouvier définit le *volume* comme étant la *synthèse de l'interposition des points possibles dans un ordre quelconque entre des systèmes de points régis par la loi de surface* [2], attendu que, pour lui, l'intervalle se remplit sans aucune loi, à la différence de ce qui a lieu lorsqu'une surface remplit l'intervalle entre deux étendues linéaires. Lorsqu'on a posé une telle conception à la base de la géométrie, on ne s'est pas enfermé dans l'espace défini par M. Delbœuf, mais on a posé en dogme qu'un seul espace est concevable et, comme on ne l'a pas défini, on

1. Un espace est à une, deux, trois dimensions, quand, pour y déterminer la position d'un point, il est besoin d'une, de deux ou de trois coordonnées. Dans le premier cas, on a une ligne; dans le second, une surface; dans le troisième, ce que l'on appelle l'espace ou quelque chose d'analogue.

2. *Traité de logique générale et de logique formelle*, 2e édit., t. I, p. 295.

Digitized by Google

s'est imposé la nécessité de remplacer, à un instant ou à un autre, la définition manquante par un postulat. Du moment, d'ailleurs, qu'on ne s'est point rendu compte de ce qu'on faisait, on s'est interdit tout moyen de comprendre une conception plus générale, et l'on ne peut que « faire de tristes réflexions, comme M. Renouvier, sur la difficulté que les hommes trouvent à s'entendre dans l'exercice de la raison[1] ».

Ceux donc qui se refuseraient absolument à admettre la notion d'espaces à trois dimensions distincts de celui que nous révèlent nos sensations peuvent ne pas nous suivre plus loin, dans ce paragraphe, car c'est sur cette notion que repose tout ce que nous allons dire.

Pour celui qui regarde l'*espace* comme le contenant nécessaire de toute géométrie, il est naturel de s'y placer dès l'abord ; mais celui qui n'y voit qu'un cas particulier est amené logiquement à étudier chaque espace en lui-même, quel que soit le nombre de ses dimensions, sauf à le placer ensuite dans les espaces d'ordre supérieur, où il jouit de nouvelles propriétés, variables avec le choix de l'espace où on le considère.

Envisagés ainsi en eux-mêmes, les espaces à une dimension ne sauraient fournir des notions géométriques notables à un être linéaire qui s'y déplacerait sans rien connaître en dehors[2]. Il constaterait si cet espace a des limites ou points terminaux, s'il est fermé, c'est-à-dire fini sans limite, ou, enfin, infini. Cette dernière qualité ne pourrait assurément être constatée réellement, mais elle pourrait sans doute être conçue par induction.

Sur une surface, ou espace à deux dimensions, la géométrie va se compliquer singulièrement, car les lignes qui

1. Même ouvrage, t. II, p. 93.

2. C'est, croyons-nous, à Helmholtz qu'on doit l'hypothèse de ces êtres à moins de trois dimensions vivant dans les espaces d'ordre inférieur.

Digitized by Google

y seront tracées peuvent être étudiées d'une façon beaucoup plus complète, et l'on peut même les déplacer sur la surface. Ce sont là autant de notions qui viennent s'ajouter aux propriétés des surfaces elles-mêmes, de même nature que celles des lignes, quand on ne sortait pas de celles-ci.

Nous venons de dire que l'on peut déplacer les lignes sur les surfaces, et ceci nous amène à définir les *figures égales*, question à la fois fondamentale et délicate entre toutes. « Toute la géométrie », dit M. Calinon, « repose sur « l'idée première de l'égalité; on admet qu'avant même de « savoir comparer les diverses grandeurs que l'on rencontre « dans les figures, on peut juger de l'égalité de deux figures, « ou, ce qui revient au même, séparer, dans une figure, les « deux éléments de position et de forme. Dans cet ordre « d'idées, on peut dire que deux figures égales sont deux « positions différentes d'une même figure, et l'on constate « que deux figures sont égales en les confondant en une « seule par un changement dans leurs positions respec- « tives ; on dit alors qu'il y a coïncidence [1]. »

Cette définition de l'égalité, notre ami le sait bien, prête le flanc à la critique la plus embarrassante : « Deux figures « sont égales », dit M. Poincaré, « quand on peut les super- « poser ; pour les superposer, il faut déplacer l'une d'elles

1. *La sphère, la ligne droite et le plan*, p. 4. Disons de suite qu'on consultera du même auteur, avec le plus grand profit, une *Introduction à la géométrie des espaces à trois dimensions*, et des articles parus dans la *Revue philosophique* de juin 1889 et d'octobre 1891, ainsi que sa plus récente publication, brochure sur *La géométrie à deux dimensions des surfaces à courbure constante* (Gauthier-Villars, 1895). On trouvera d'ailleurs une bibliographie non euclidienne fort intéressante à la suite d'un article de M. Mansion sur les travaux de M. de Tilly, paru dans la *Revue des questions scientifiques* d'avril 1895. M. Mansion veut bien nous signaler en outre un ouvrage récent de grande valeur de Engel et Stäckel (*die Theorie der Parallellinien von Euclid bis Gauss*, Leipzig, 1895).

Digitized by Google

« jusqu'à ce qu'elle coïncide avec l'autre ; mais comment « faut-il la déplacer? Si nous le demandions, on nous « répondrait sans doute qu'on doit le faire sans la défor- « mer et à la façon d'un solide invariable. Le cercle vicieux « serait alors évident... Tout imparfaite qu'elle soit, cette « définition implique un axiome. La possibilité du mouve- « ment d'une figure invariable n'est pas une vérité évidente « par elle-même, ou, du moins, elle ne l'est qu'à la façon « du postulatum d'Euclide, et non comme le serait un juge- « ment analytique *a priori* [1]. »

Cette critique est décisive et ne saurait être éludée ; mais, avant d'aborder la solution de cette difficulté, nous en signalerons une autre, formulée par M. Renouvier. Pour lui, le déplacement sans déformation va de soi, mais le passage de l'identité de figure, ou égalité géométrique, à celle d'égalité de mesure exige un postulat ou jugement synthétique *a priori*, nulle analyse ne pouvant nous apprendre que le même de figure est aussi le même de quantité [2]. Nous ne saurions admettre cette manière de voir, attendu que, la mesure d'une figure étant en soi une opération géométrique (décomposition en figures élémentaires), cette opération, appliquée à deux objets géométriquement identiques, ne peut conduire qu'à des résultats identiques, des résultats différents ne pouvant avoir de raison suffisante.

Cette difficulté écartée, revenons à celle que M. Poincaré a si bien mise en évidence. Pour la rendre plus claire encore, si quelque doute pouvait subsister, nous allons montrer, sur un exemple, que, d'une façon générale, la superposition de deux figures n'établit point leur égalité telle qu'on l'entend généralement.

Soit une surface telle qu'un ellipsoïde et, sur cette sur-

1. *Les géométries non euclidiennes*, dans la *Revue générale des Sciences pures et appliquées* du 15 décembre 1891, p. 772.
2. *Deuxième année philosophique* de M. Pillon, p. 23.

Digitized by Google

face, un triangle géodésique, c'est-à-dire formé par les plus courts chemins entre ses sommets. Déplaçons ce triangle en conservant les côtés (il est vrai que nous tombons ici dans un cercle vicieux, mais peu importe, puisqu'il s'agit simplement de montrer que les définitions courantes conduisent à des contradictions) : dirons-nous que le nouveau triangle est égal au premier, est le même dans une autre position? Ici, il faut distinguer les côtés et les angles : les côtés ont, il est vrai, changé de courbure ; mais cette courbure et, par suite, son changement ne sont appréciables que dans l'espace à trois dimensions. Donc, en géométrie à deux dimensions, on pourra dire que les côtés sont restés les mêmes. Mais, pour les angles, il en est autrement, car, si je prenais un second triangle ayant un angle commun avec le premier, après le déplacement les deux angles homologues ne pourraient coïncider, ce qui montre qu'on ne peut considérer les deux angles après déplacement comme identiques au premier angle, puisque l'un d'eux est plus grand que l'autre.

De ceci il résulte clairement que la définition ordinaire de l'égalité de deux figures par leur superposition n'est admissible que dans des espaces spéciaux. Bien que nous devions envisager d'une façon particulière ces espaces, il est indispensable de nous rendre compte comment des êtres vivant dans d'autres espaces pourraient appliquer l'idée métaphysique d'identité aux figures géométriques, ou plutôt à leurs éléments.

Reprenons l'exemple d'un être superficiel vivant sur un ellipsoïde. Nous avons parlé tout à l'heure de lignes géodésiques ou de plus courte distance ; mais nous ne saurions prendre cette idée comme point de départ, car la notion de plus courte distance exige la comparaison des grandeurs et ne peut précéder l'idée d'égalité. Ici nous allons scandaliser, sans doute, plus d'un de nos lecteurs en ayant recours à

Digitized by Google

une expérience physique qui, par essence, ne peut rien donner de rigoureux, et qu'on ne saurait interpréter sans tomber dans des cercles vicieux. Malgré tout, nous croyons l'artifice aussi légitime qu'il est indispensable, non dans la forme que nous lui donnerons, mais dans son idée essentielle. Du moment que nous ne considérons pas la géométrie comme une science innée au sens propre et rigoureux du mot, il est clair que nous devons chercher dans les perceptions ou expériences un point de départ, ou plutôt un excitant pour l'esprit. Celui-ci, travaillant sur des données sensibles et sans précision, leur appliquera les notions générales qui se seront éveillées en lui, peut-être à leur occasion, et pourra construire alors une science apriorique, qui pourrait même ne pas s'appliquer en fait aux phénomènes réels sans que sa propre valeur en fût en rien diminuée.

Supposons donc que notre sujet superficiel puisse disposer d'un fil, fil ayant, sans doute, une largeur, comme les nôtres, mais point d'épaisseur, et qu'il tende ce fil successivement dans deux positions différentes. Pour nous, qui envisageons toutes choses dans un espace à trois dimensions, les deux arcs ainsi déterminés diffèrent par leurs courbures; mais ces courbures ne sont pas appréciables sur l'ellipsoïde, en sorte que notre sujet sera amené à considérer ces lignes comme identiques de forme et de longueur, leurs positions seules étant différentes.

Il est vrai que cela suppose l'inextensibilité du fil, alors qu'elle est impossible à vérifier véritablement sans cercle vicieux; mais, nous l'avons dit, il ne s'agit de demander à l'expérience que de simples suggestions. Or, l'idée d'extensibilité et d'inextensibilité d'un fil surgit naturellement, lorsqu'après en avoir tendu plusieurs on peut encore éloigner, au moyen d'un effort, les extrémités de certains d'entre eux, tandis que ce déplacement ne se produit pas sensiblement pour les autres.

Digitized by Google

La notion d'identité de deux lignes ainsi acquise aura besoin d'être développée ; mais auparavant il faut envisager les angles. Ici on se heurte à une grosse difficulté, car un angle est essentiellement dépourvu de fixité si l'on ne relie pas ses côtés l'un à l'autre ; or, nous avons vu que, sur l'ellipsoïde, de telles liaisons ont précisément pour résultat de faire varier l'angle quand on déplace la figure. Pour sérieux qu'il soit, l'obstacle n'est pas invincible, grâce à une propriété commune à toutes les surfaces, comme nous le verrons. Si nous considérons une série d'angles formés tout autour d'un point pris comme sommet, et si nous joignons leurs côtés deux à deux, de façon à donner naissance à autant de triangles, un déplacement de ceux-ci, tel qu'ils aient de nouveau un sommet commun à tous et un côté commun à deux triangles successifs, aura pour résultat de faire constater que le dernier côté ne coïncidera pas avec le premier : il y aura vide ou recouvrement. Si l'on recommence l'opération en réduisant les côtés des triangles, l'écart sera moindre et deviendra plus petit que tout angle donné si l'on diminue suffisamment les côtés, en sorte que, à la limite, le dernier côté se superposerait au premier. De là on est amené à conclure que les angles des triangles infiniment petits restent identiques à eux-mêmes dans le déplacement de ceux-ci sur l'ellipsoïde [1].

Il est bien vrai que, sur certaines surfaces, il y a des points singuliers, tels que le sommet d'un cône, qui, pris comme sommets des angles après le déplacement, donneraient lieu à un recouvrement plus ou moins notable ; mais

1. Nous prévoyons qu'on nous objectera que nous utilisons nos connaissances géométriques dans cet exposé, connaissances acquises au moyen de la géométrie euclidienne. Nous ne le nions pas ; mais il s'agit de savoir si, oui ou non, l'habitant de l'ellipsoïde pourrait expérimenter et raisonner comme nous le supposons, sans rien connaître en dehors.

Digitized by Google

le fait apparaîtrait comme une *singularité* de ces points, n'empêchant pas le fait général sur lequel repose la notion d'égalité des angles.

Une fois en possession de l'égalité de certaines lignes, particulières sans doute, mais telles qu'il en passe toujours une par deux points donnés, ainsi que de l'égalité des angles, on peut, absolument comme en géométrie ordinaire, faire la théorie de la longueur et de la courbure des autres lignes, cette courbure étant exclusivement mesurée sur la surface. Nous n'insisterons pas davantage sur la géométrie de ces surfaces quelconques, afin de concentrer notre attention sur celle des surfaces *identiques à elles-mêmes.*

M. Calinon appelle ainsi les surfaces telles que les figures qui y sont tracées peuvent être déplacées d'une façon quelconque sans déformation. Faute de la discussion qui précède, on a pu lui objecter à bon droit qu'il ne nous disait pas ce que signifiait cette expression « sans déformation », et, de fait, le passage que nous avons cité de son étude sur la sphère, la ligne droite et le plan paraît bien poser cette notion de conservation de la forme comme une intuition non susceptible de définition [1]. Maintenant, au contraire, nous savons comment, à ne considérer qu'une surface donnée, un habitant de cette surface pourrait reconnaître si elle est ou non identique à elle-même, ou, du moins, si l'on peut toujours admettre qu'il n'y a pas concordance entre ses sensations et la forme réelle de la surface, nous savons quelles sensations susciteront en son esprit la notion d'une surface identique ou non à elle-même. Il est bien

1. Cette conception paraît lui avoir été inspirée par l'*Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* de M. Hoüel. « La géométrie, dit cet auteur, est fondée sur la notion indéfinissable et expérimentale de la *solidité* ou de l'*invariabilité* des figures » (2e édit., p. 41).

Digitized by Google

entendu, d'ailleurs, que la courbure d'une ligne appréciable seulement dans l'espace à trois dimensions ne saurait compter en géométrie à deux dimensions, de telle sorte qu'un cylindre parabolique, par exemple, est absolument identique à un plan; pour qui s'enferme sur la surface, aucune distinction n'est possible entre l'hélice et la génératrice rectiligne, en sorte qu'un arc de la première sera, non pas équivalent, mais *égal* à un segment de la seconde. Au contraire, il n'en serait pas de même sur un cylindre à directrice fermée ou sur un cône : sur ces surfaces, il est bien vrai qu'une figure peut se déplacer en conservant ses côtés et ses angles, mais certains déplacements entraînent des intersections supplémentaires des côtés, qui naissent, changent de position sur ceux-ci et forment des angles variables. De telles surfaces ne répondent donc pas à la définition donnée ci-dessus. En général, les surfaces à courbure constante permettent le déplacement des figures qui y sont tracées avec conservation des éléments ; mais il en est beaucoup qui présentent la même particularité que les cylindres à directrice fermée et les cônes : telles sont les pseudo-sphères, dont nous aurons à parler. On trouvera, dans une récente publication de M. Calinon, une ingénieuse théorie de ces surfaces, où, après les avoir envisagées dans l'espace à trois dimensions qui lui permet de les considérer comme la superposition de feuillets multiples résultant de l'enroulement d'une surface identique, il se restreint aux ressources de la géométrie à deux dimensions [1].

Après avoir défini les surfaces étudiées par une propriété caractéristique, ce qui était inévitable, puisqu'aucune définition antérieure ne nous permettait d'en donner la construction, nous devons, pour la même raison, définir par une

1. *La géométrie à deux dimensions des surfaces à courbure constante.*

Digitized by Google

propriété les lignes qui serviront de base à la construction des figures sur nos surfaces ; leurs géodésiques, disons-nous, sont des lignes telles que, par deux points quelconques pris sur une surface, il en passe toujours une et généralement une seule [1]. Ce mot « généralement » a soulevé quelques critiques ; mais elles ne paraissent aucunement fondées, car c'est un fait ordinaire, en géométrie comme en algèbre, qu'il existe des cas particuliers dérogeant aux propositions les plus générales ; ainsi, trois points déterminent *généralement* un plan, mais il en passe une infinité par trois points en ligne droite.

Nous ne saurions entrer dans le développement de la géométrie des surfaces identiques à elles-mêmes ; mais nous devons en indiquer les éléments essentiels.

En général, il ne passe par deux points qu'une géodésique, mais on peut supposer qu'il existe ou non des cas exceptionnels. Si l'on suppose qu'il en existe, on démontre qu'alors toutes les géodésiques passant par l'un des deux points communs à deux géodésiques données passent par leur second point commun, qu'elles n'ont pas d'autres points d'intersection, sont fermées, et divisées chacune en deux parties égales par leurs deux points communs. Dès lors, on peut faire tourner une géodésique autour de deux de ses points la divisant en deux parties égales, et, dans ce mouvement de rotation, elle engendre toute la surface, qui est ainsi une surface finie, mais non limitée. Une telle surface s'appelle une sphère.

Si, au contraire, on suppose qu'il n'existe qu'un point

1. Plus haut, à propos de l'ellipsoïde, nous avions défini les géodésiques par la condition de la plus courte distance : c'est qu'en effet, sur une surface quelconque, la condition d'être déterminée par deux points ne suffit pas en général à définir une ligne, d'autres que celle de plus courte distance pouvant jouir de cette particularité.

Digitized by Google

commun à deux géodésiques, celles-ci s'étendent indéfiniment, et la surface identique à laquelle elles appartiennent est elle-même infinie. Ainsi que nous le verrons, il n'existe qu'une seule surface en géométrie euclidienne, le plan, qui réponde à ces conditions, car les pseudo-sphères n'y répondent que partiellement; aussi celles de ces surfaces qui diffèrent du plan n'ont-elles point reçu de nom: nous les désignerons par la qualification de surfaces de Lobatschewski, géomètre pour qui elles sont des plans.

Une foule de théorèmes de la géométrie plane ordinaire se démontrent identiquement de la même façon pour ces diverses surfaces, en remplaçant, bien entendu, les droites par les géodésiques ; mais on doit remarquer seulement qu'on ne peut faire intervenir, dans ces démonstrations, l'opération du retournement, qui ne saurait s'opérer que dans un espace à trois dimensions. D'autre part, les demandes ou postulats d'Euclide sont écartés ; prenons pour exemples celui d'après lequel deux droites ne peuvent enfermer un espace et celui des parallèles. On vient de voir que l'affirmation ou la négation du premier ne fait que distinguer deux classes de surfaces identiques, ce qui montre que ni l'une ni l'autre n'est nécessaire, quand on étudie l'ensemble de ces surfaces. Quant au postulat des parallèles, il caractérise une surface spéciale, celle où il existe des figures semblables, où la somme des angles de tous les triangles est égale à deux droits; quant aux autres surfaces, elles se décomposent exactement comme tout à l'heure en deux classes, dont la première ne présente pas de parallèles, toutes les géodésiques se coupant les unes les autres, tandis que, sur les surfaces de la seconde classe, par tout point pris en dehors d'une géodésique il passe une infinité de géodésiques ne rencontrant pas la précédente.

Nous ne nous arrêterons pas à examiner ainsi ce que

Digitized by Google

devient chacun des postulats d'Euclide, parce que, ce petit travail achevé, les adversaires de la géométrie générale nous diraient : « C'est fort bien, mais cela n'a aucune importance, car on admet une foule d'autres propositions sans les énoncer explicitement, et vous n'échapperez pas à la nécessité des postulats. » Et voilà venir alors une critique de détail extrêmement utile, car elle force à toujours améliorer les exposés, mais à laquelle nous ne saurions essayer de répondre ici, car ce serait toute la géométrie à refaire, et, comme nous ne prétendons pas atteindre la perfection, un critique subtil ne manquerait pas de découvrir une proposition implicite non démontrée. Nous reconnaîtrons donc notre impuissance à convaincre celui qui serait décidé à ne se rendre que devant un exposé absolument irréprochable ; mais ceux qui n'ont pas cette attitude intransigeante, qui ne s'appuient pas sur une idée préconçue bien arrêtée, doivent procéder par épreuves, signaler des propositions non démontrées, et voir si les adeptes de la géométrie générale peuvent ou non répondre à leurs objections. Si cette épreuve répétée réussit, l'homme qui cherche d'un esprit libre la vérité devra admettre qu'on peut se passer des postulats[1].

Mais nous nous heurtons à une dénégation formelle et appuyée sur une considération très spécieuse à laquelle

1. A des objections de ce genre, nous avons répondu par *quelques théorèmes de géométrie élémentaire*, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de décembre 1891. D'autre part, M. l'abbé de Broglie, dont on ne saurait trop déplorer la fin tragique, a écrit, mais non publié, malheureusement, une série de démonstrations de propositions généralement postulées implicitement. Il est bien à désirer que sa famille mette le public en mesure d'apprécier ce travail. Ajoutons que M. de Broglie était un adversaire déclaré de la géométrie générale, qu'il a combattue de la façon la plus intéressante dans les *Annales de philosophie chrétienne*.

Digitized by Google

nous devons répondre : Non, dit M. Renouvier, vous ne démontrez pas toutes les propositions qu'on vous signale, à tel point qu'il est tel théorème classique dont la démonstration est impossible. Soit, par exemple, celui d'après lequel par un point pris sur une droite on peut mener une perpendiculaire et une seule. Sans doute, si l'on fait tourner une demi-droite issue de ce point et d'abord en coïncidence avec une des moitiés de la droite donnée, jusqu'à ce qu'elle vienne en coïncidence avec l'autre moitié, on a deux grandeurs les angles adjacents dont la somme est constante, et dont l'une, partant de zéro, arrive par une variation continue à une valeur égale à la somme constante, tandis que l'autre subit une variation inverse; sans doute, encore, on peut démontrer analytiquement qu'en pareil cas il existe une valeur et une seule de la variable indépendante à laquelle corresponde une valeur égale de l'autre variable. Mais, si l'on peut ainsi conclure à une égalité *arithmétique* ou de mesure, on ne le peut à une égalité *géométrique* ou de superposition, qui exige une synthèse *a priori* entre deux ordres de notions différents [1].

L'objection est très sérieuse et veut être approfondie. Prenons donc la figure formée par la droite et la demi-droite, lorsque celle-ci fait avec la première deux angles ayant même mesure, c'est-à-dire contenant un même nombre de fois un angle pris pour unité ; pouvons-nous démontrer que ces deux angles sont superposables? Faisons tourner une moitié de la figure autour du sommet des angles (ce qui est possible sans déformation, en vertu de la définition des surfaces identiques à elles-mêmes), jusqu'à ce que la moitié mobile de la droite vienne en coïncidence avec la

1. Voir, dans la Deuxième *Année philosophique* de M. Pillon, l'étude de M. Renouvier ayant pour titre : *La philosophie de la règle et du compas. Théorie logique du jugement dans ses applications aux idées géométriques et à la méthode des géomètres.*

Digitized by Google

position primitive de la demi-droite; il s'agit de savoir si alors cette dernière coïncide avec l'autre moitié de la droite. D'une façon générale, on ne saurait conclure de l'identité de mesure à la superposition ou identité de figure; mais ici on est en présence d'un cas particulier. Supposons, par exemple, que la demi-droite, dans sa nouvelle position, n'ait pas encore atteint la seconde moitié de la droite: je dis qu'alors son angle avec l'autre moitié est plus petit numériquement que l'autre angle, ce qui est contraire à l'hypothèse. En effet, si j'opère la division dudit angle au moyen de celui qui sert d'unité, toutes les divisions seront contenues dans le second angle, qui contiendra en plus l'angle dont nous avons supposé l'existence; donc il faut que ce dernier soit nul, c'est-à-dire que la demi-droite, après sa rotation, coïncide avec la seconde moitié de la droite, et que les deux angles soient en superposition.

Signalons, enfin, comme se rapprochant des prétendus axiomes, le théorème en vertu duquel le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface considérée, bien entendu, est l'arc de géodésique qui les joint (ou le plus petit des deux, s'il s'agit d'une sphère). Ce théorème se démontre rigoureusement en partant de la définition donnée pour les géodésiques[1].

Pour en finir avec ces détails quelque peu arides, il nous reste à signaler un petit nombre de propositions utiles à connaître pour se faire une idée de ces géométries. La plus importante, peut-être, consiste en ce que tout triangle infi-

1. Voir notamment, dans *la Sphère, la ligne droite et le plan* de M. Calinon, le paragraphe sur les triangles sphériques (p. 10 à 15) et, dans sa *Géométrie à deux dimensions*, les pages 22 et suiv. On verra aussi, dans les *Prolégomènes* de M. Delbœuf, le théorème IV de la page 227 et ses corollaires; mais ce dernier part de définitions différentes. On trouvera, dans la *Revue de métaphysique et de morale* de janvier 1893, une intéressante discussion des postulats de M. Renouvier par M. Couturat.

Digitized by Google

niment petit a deux droits pour somme de ses angles[1], d'où il suit que toute figure infiniment petite est conforme à la géométrie euclidienne. La grandeur d'une figure est même liée d'une façon si étroite à l'écart qui existe entre sa géométrie et cette dernière, que l'aire d'un triangle et, en général, d'un polygone fermé quelconque est proportionnelle à son *excès*, c'est-à-dire à la différence positive ou négative existant entre la somme de ses angles et celle des angles d'un polygone plan euclidien ayant même nombre de côtés. Ce théorème s'étend, d'ailleurs, aux contours curvilignes par la considération de la courbure totale de ceux-ci, c'est-à-dire de la rotation d'une tangente les décrivant en entier[2]. En appelant E cet excès, l'aire d'un contour fermé est donc égale à son produit KE par un paramètre constant K; pour le plan où E est nul, il faut nécessairement que K soit infini[3].

Ce paramètre K a un caractère essentiellement géomé-

1. Considérant un triangle formé par trois géodésiques et supposant qu'un des côtés tend vers une position limite passant par le sommet opposé, on voit que les deux angles adjacents à ce côté tendent vers les angles formés par sa position limite avec les prolongements des deux autres côtés ; or, ces deux angles forment deux droits avec l'opposé au sommet du troisième angle du triangle.

2. Notons à cette occasion que la longueur d'une courbe se définit exactement comme sur le plan euclidien, au moyen de la limite d'un contour polygonal inscrit dont les côtés sont des arcs de géodésiques.

3. Une autre conséquence de l'expression de l'aire d'un polygone consiste en ce que, sur une surface de Lobatschewski, aucun polygone ayant un nombre fini de côtés ne peut avoir une surface infinie. Si l'on considère un triangle, sa surface maximum est égale au produit $K \times 2$ droits ; on a alors un triangle dont les sommets sont rejetés à l'infini, où ses côtés sont tangents deux à deux. On peut en conclure aussi que, si l'on joint deux points équidistants d'une géodésique par un segment de géodésique, celui-ci, au milieu, se rapproche indéfiniment de la première lorsque les deux points s'éloignent indéfiniment l'un de l'autre.

Digitized by Google

trique et n'est point un nombre abstrait ; pour que son produit par une différence angulaire, de degré zéro, mesure une aire, il faut qu'il en soit une lui-même et que, par suite, (K_1 étant la valeur absolue de K) $\sqrt{K_1}$ soit une ligne.

Du moment, d'ailleurs, que nous considérons les diverses surfaces isolément, sans les placer dans un même espace à trois dimensions, nous ne pouvons établir entre elles aucune comparaison, et, pour nous, comme pour les habitants de chacune de ces surfaces, $\sqrt{K_1}$ n'est qu'une longueur prise sur chacune d'elles sans commune mesure de l'une à l'autre. Dans ces conditions, nous ne connaissons, à vrai dire, que trois surfaces, la sphère, le plan et la surface de Lobatschewski, sans que nous puissions distinguer plusieurs surfaces sous chacun de ces noms. Il est à peine besoin d'ajouter que chacune de ces surfaces a sa trigonométrie propre, dont les formules sont celles des trigonométries de la sphère, du plan et de la pseudo-sphère ; mais on n'oubliera pas que cette dernière surface n'est pas identique à elle-même et ne se confond point avec celle de Lobatschewski, point important dont nous verrons bientôt une nouvelle preuve bien caractéristique [1].

Si nous considérons tout ou partie de ces diverses surfaces dans un même espace à trois dimensions, un premier

1. Les personnes désirant étudier avec détail les bases de ces géométries se reporteront à la plus récente publication de M. Calinon, *La géométrie à deux dimensions des surfaces à courbure constante.* Il y aborde les questions par la considération des figures infiniment petites, qui toutes sont euclidiennes à des infiniment petits d'ordre supérieur près. C'est un exposé didactique d'une remarquable précision, non une étude proprement philosophique. Notons que M. Calinon appelle surfaces à courbure constante celles qui sont identiques à elles-mêmes considérées intrinsèquement, mais cessent de l'être quand on les considère dans un espace à trois dimensions.

Digitized by Google

résultat de ce rapprochement sera de permettre une comparaison des longueurs des lignes situées sur ces surfaces, quand ce ne serait que par l'intermédiaire de leurs intersections. Nous verrons tout à l'heure ce qui caractérise les divers espaces à trois dimensions, mais auparavant nous allons signaler un certain nombre de particularités que chacun peut vérifier dans l'espace euclidien, et que l'analyse montre être indépendantes de l'espace spécial que l'on considère, pourvu qu'il s'agisse d'un espace identique à lui-même.

Soit un cercle de rayon R; on peut le considérer comme situé sur un plan ou sur une sphère quelconque de rayon au moins égal à R. Sur chacune de ces surfaces, ce cercle jouit de propriétés différentes : il y a des rayons différents (distances polaires en langage usuel) et y circonscrit des aires qui, non seulement sont inégales, mais n'ont aucun point commun en dehors de leur périphérie. Enfin, sur la sphère de même rayon, il est ligne géodésique et est retournable, car tout arc de grand cercle, par une rotation de 180° autour de son sommet, revient en superposition avec lui-même, mais avec interversion de ses extrémités; au contraire, un arc de cercle n'est aucunement retournable sur une sphère de plus grand rayon [1].

Ceci posé, l'analyse montre, d'accord avec une induction fort naturelle, qu'on peut concevoir de même des espaces à trois dimensions qui sont aux sphères et au plan ce que ces surfaces sont aux cercles et à la droite. C'est l'espace euclidien qui répond au plan, comme le plan à la droite; de même que celle-ci est retournable dans le plan, de même le plan est retournable dans l'espace euclidien. Quant aux

1. Si l'on considère un cercle entier, on peut dire, en un sens, qu'il est retournable autour de son centre; mais cette propriété disparaît si l'on ne considère qu'un arc de cercle. D'ailleurs, la véritable retournabilité doit concerner une rotation *autour d'un point de la ligne retournable.*

Digitized by Google

espaces correspondant aux différentes sphères, chacun d'eux ne peut recevoir des sphères de plus grand rayon que celle qui lui correspond, et celle-ci y est *retournable* [1]. On ne saurait méconnaître que cette propriété, pour une surface sphérique, ne répond pour nous à aucune *intuition*, pour parler le langage des adversaires de la géométrie générale, à aucune image, pour exprimer plus simplement la chose. Mais, nous le demandons, n'en serait-il pas exactement de même pour un être superficiel vivant sur un plan, si on lui parlait de la retournabilité d'un cercle autour d'un de ses points ? et, dès lors, quelle objection peut-on, avec quelque autorité, élever contre la concevabilité de cette propriété inimaginable ?

Il y a, d'ailleurs, complète analogie entre les diverses surfaces qu'enferme un cercle donné et les volumes qu'enferme une sphère donnée : ces volumes ont des mesures différentes et n'ont même aucun point commun [2]. Les espaces correspondants sont, d'ailleurs, des espaces finis, mais non limités, de même que la sphère est une surface finie, mais non limitée. Seulement, nous ne pouvons nous imaginer

1. Comme tout à l'heure un cercle était retournable en tout cas autour de son centre, une surface quelconque, une sphère l'est autour d'un de ses diamètres dans un espace quelconque ; mais la retournabilité dont nous parlons doit s'exercer autour d'une géodésique de la sphère, comme celle du cercle autour d'un de ses points.

2. Les volumes, comme les surfaces, se mesurant au moyen des lignes et toutes celles-ci étant comparables, volumes et surfaces le sont aussi. Mais la propriété de toutes les figures infiniment petites de se confondre à la limite avec des figures euclidiennes permet d'évaluer directement les surfaces et les volumes de toutes sortes, car un volume élémentaire, tétraèdre déterminé par quatre points infiniment voisins, peut être remplacé par le tétraèdre euclidien ayant ces quatre points pour sommets, un espace euclidien pouvant toujours passer par quatre points donnés. La valeur du volume élémentaire étant ainsi connue, l'analyse permet de calculer tous les volumes.

Digitized by Google

un tel espace qui ne pourrait *se voir* que dans un espace à quatre dimensions.

Il y a, enfin, parfaite correspondance de propriétés entre la sphère retournable et le plan euclidien, car aux propriétés communes de l'identité de la surface à elle-même et de la retournabilité s'ajoute le fait que la géodésique de la sphère est celle de l'espace dans lequel elle est retournable [1] et, comme telle, est le plus court chemin d'un point à un autre dans cet espace ; en outre, deux sphères retournables se coupent toujours suivant une géodésique.

Cette similitude de propriétés entre les sphères retournables et le plan dans l'espace euclidien, entre leurs géodésiques et la ligne droite, a permis de leur donner les noms de plans et de droites dans la géométrie de Riemann ; mais il doit être bien entendu que cette communauté d'appellation ne signifie aucunement que les plans et les droites ont, à volonté, des propriétés contradictoires. Il y a plus, ces sphères retournables sont identiquement les mêmes surfaces que les sphères euclidiennes, mais envisagées dans des espaces à trois dimensions différents, absolument comme le grand cercle retournable d'une sphère est identiquement le même que le cercle non retournable sur un plan diamétral. Ce fait capital paraît avoir été aperçu pour la première fois par M. Delbœuf, dont les vues géniales éclairent une science qu'il méconnaît lui-même [2].

1. Si nous considérons la géodésique de l'espace passant par deux points A et B d'une sphère retournable, elle doit être située tout entière sur cette sphère ; si on retourne en effet celle-ci sur elle-même en la faisant pivoter autour de sa géodésique passant par A et B, et si on la considère comme entraînant la géodésique de l'espace dans ce mouvement, cette dernière se trouverait passer d'un côté à l'autre de la surface sphérique, si elle n'y était pas comprise, ce qui est impossible, puisque les deux points déterminent une seule géodésique de l'espace.

2. Voir *Revue philosophique* d'avril 1894, p. 373 à 377 (*L'ancienne et les nouvelles Géométries*).

Digitized by Google

Si maintenant nous considérons les surfaces identiques à paramètres négatifs, nous verrons qu'elles ne peuvent entrer dans un espace euclidien, mais qu'on peut y tracer les cercles de tous diamètres, y compris la ligne droite, cercle de rayon infini ; mais elle n'y est plus géodésique : par deux points donnés, il en passe deux dans une surface de Lobatschewski, et elle n'y est pas le plus court chemin d'un point à l'autre [1]. C'est là ce qui montre, de la façon la plus frappante, que ces surfaces ne sont point des pseudo-sphères, comme les plans de Riemann sont de simples sphères euclidiennes considérées dans d'autres espaces. Dans son article cité, M. Delbœuf n'a pas fait cette distinction, qui est capitale.

1. Si l'on désigne par c la distance euclidienne de deux points et par s leur distance sur une surface Lobastchewski ayant un rayon de courbure de valeur absolue $r_1 (r_1 = \sqrt{K_1})$, on a :

$$c = 2r_1 \sin \text{hyp.} \frac{s}{2r_1}$$

ou :

$$c = \frac{r_1}{2}\left(e^{\frac{s}{r_1}} - e^{-\frac{s}{r_1}}\right);$$

d'où :

$$c - s = \frac{1}{1.2.3}\frac{s^3}{r_1^2} + \frac{1}{1.2...5}\frac{s^5}{r_1^4} + \frac{1}{1.2.3...7}\frac{s^7}{r_1^6} + \dots$$

$c - s$ est toujours positif, d'où il suit que la droite euclidienne est plus longue que celles de Lobatschewski.

Dans un espace de Riemann, on a :

$$c = 2\,r \sin \frac{s}{2r},$$

ce qui est précisément la valeur de la corde en fonction de l'arc de cercle qu'elle sous-tend, comme on pouvait le prévoir.

Avec les deux formules, c et s deviennent égaux pour des valeurs infinies du rayon de courbure.

Digitized by Google

De même, le plan entre dans les espaces de Lobatschewski, mais il n'y est pas retournable. Comme, d'ailleurs, dans chacun de ces espaces, la surface retournable et la géodésique sont appelées communément plan et droite, on y désigne sous les noms d'horisphère et d'horicycle le plan et la droite ordinaires. Notons en passant que, avec ce langage, le lieu des points équidistants à une droite n'est pas une droite, mais un horicycle.

Si nous résumons ce que nous venons de dire des divers espaces, nous verrons que tout espace identique à lui-même peut contenir les surfaces identiques de plus petit paramètre, en convenant de considérer les paramètres négatifs comme plus grands que tous les paramètres positifs, et comme d'autant plus grands que leurs valeurs absolues sont moindres. On peut ajouter que, dans chaque espace, la surface de même paramètre est retournable, et que sa géodésique est celle de l'espace. Il en résulte immédiatement que la distance de deux points donnés est d'autant plus courte qu'on la mesure dans un espace de plus grand paramètre ou de plus petite courbure; mais on ne doit pas oublier la convention faite sur le sens de ces expressions.

Si l'on se demande s'il existe des figures semblables dans chacun de ces divers espaces, on doit répondre affirmativement, mais avec de très importantes restrictions. Sur une surface identique donnée, il n'existe pas généralement de figures semblables, le plan euclidien jouissant seul de cette propriété, puisque sur lui seul les angles d'un triangle ne dépendent que des rapports entre les longueurs de ses côtés ; mais il existe des figures semblables sur des surfaces identiques différentes. Comme, d'ailleurs, le plan euclidien entre dans tous les espaces à paramètre négatif, on peut voir dans tous ces espaces des figures semblables sur une même surface. On pourrait, d'ailleurs, se demander si, grâce à l'emploi des droites euclidiennes, on ne pourrait pas, dans

Digitized by Google

ces espaces, construire des figures semblables à trois dimensions; mais il n'en est rien, en raison du fait que, dans ces espaces, la droite euclidienne n'est pas géodésique, mais qu'il en passe une infinité par deux points donnés; en outre, un espace euclidien ne peut avoir en commun avec un autre espace autre chose qu'un plan ou une surface sphérique, ainsi que nous le verrons plus loin.

Cette impossibilité générale de construire deux figures semblables dans un espace autre qu'un espace euclidien ne signifie pas, cependant, qu'à une figure non euclidienne ne réponde pas toujours une autre figure semblable et de rapport de similitude donné, mais cela signifie que cette figure existe dans un autre espace: les figures construites dans deux espaces à paramètres de même signe sont toutes semblables deux à deux avec un rapport de similitude égal à celui des racines carrées des valeurs absolues de ces paramètres.

Pour terminer cet exposé sommaire des principales propriétés des espaces identiques à eux-mêmes, il nous reste à dire quelques mots de la façon dont ils se coupent les uns les autres. Cette seule énonciation de plusieurs espaces à trois dimensions se coupant les uns les autres implique la notion d'un espace à quatre dimensions dans lequel ils seraient situés. A une telle conception, on oppose que, dans l'impossibilité absolue où nous sommes de nous représenter un tel espace [1], il est puéril d'en parler et de prétendre en

1. Certains vont jusqu'à dire que le nombre des dimensions de l'espace est nécessaire et peuvent invoquer ce passage de Leibniz: « Le nombre ternaire est déterminé, non pas par la raison du meilleur, mais par une nécessité géométrique. C'est parce que les géomètres ont pu démontrer qu'il n'y a que trois lignes droites perpendiculaires entre elles qui se puissent couper dans un même point » (*Essais sur la bonté de Dieu*, 3e partie, n° 351).

Est-il besoin de faire remarquer qu'un géomètre qui n'aurait perçu que des phénomènes enfermés sur une surface démontre-

Digitized by Google

faire la géométrie, alors que, en l'absence de toute image, on ne peut faire que de l'analyse. En principe, cette critique contre les géométries à plus de trois dimensions nous paraît très juste, pourvu, d'ailleurs, qu'on la limite, en reconnaissant que rien ne s'oppose à ce que d'autres êtres aient des images à plus de trois dimensions ; mais la conception d'un espace à quatre dimensions nous semble s'imposer à titre de condition de la notion des espaces multiples à trois dimensions. Ces derniers se coupent deux à deux, suivant une surface identique à elle-même [1], et l'on doit en concevoir une infinité du même paramètre dans un même espace à quatre dimensions ; ainsi en est-il particulièrement des espaces euclidiens, dont la multiplicité peut surprendre notre imagination, comme la multiplicité des plans dans un espace à trois dimensions surprendrait celle d'un être superficiel ne percevant que des phénomènes situés sur un plan. Il va de soi, d'ailleurs, que, si nous avons parlé d'un espace à quatre dimensions, cela ne signifie pas qu'il n'y en ait qu'un ; comme pour les espaces à trois dimensions, il y aurait lieu de définir par son paramètre chaque espace à quatre dimensions identique à lui-même.

La considération d'espaces à quatre dimensions permet de résoudre une difficulté bien propre à humilier les anciens géomètres. On a formulé souvent, contre le caractère purement géométrique de l'espace, une objection fondée sur l'impossibilité de superposer deux figures symétriques à trois dimensions [2]. Composées d'éléments identiques grou-

rait de même qu'il ne peut y avoir que deux dimensions, ces démontrations reposant sur un cercle vicieux bien caractérisé ?

1. De même que deux surfaces identiques se coupent suivant une ligne identique à elle-même.

2. Kant avait été très frappé de l'impossibilité de substituer, pour prendre son exemple, la main droite à la main gauche, et

Digitized by Google

pés dans le même ordre, elles ont mêmes équations, si on les rapporte à des systèmes d'axes semblablement situés par rapport à chacune d'elles; en sorte qu'on est en droit d'affirmer qu'elles sont identiques, sauf quant à la position dans l'espace. Mais alors, elles doivent être superposables, et, si elles ne le sont pas, il faut donc que l'espace jouisse de propriétés qui échappent à la science mathématique.

Disons de suite que cette dernière conclusion est illégitime : l'absence de superposition n'est pas seulement un fait d'expérience; mais la géométrie, et notamment la géométrie analytique, l'établit très nettement. Il s'agit donc d'un fait d'ordre essentiellement mathématique, dont on ne doit pas demander compte à je ne sais quelle inconnaissable réalité. Si la géométrie vulgaire se reconnaît, à bon droit, incapable de résoudre cette difficulté, il ne faut en accuser que son caractère étroit, et l'on peut s'adresser avec confiance à la géométrie générale qui, nous le croyons, fournit une réponse aussi simple que péremptoire.

Si nous considérons, sur un plan, deux figures symétriques par rapport à une ligne droite, et si nous cherchons à les superposer en faisant glisser l'une d'elles dans leur plan commun, nous nous heurterons à la même impossibilité qui s'oppose à la superposition de deux figures symétriques par rapport à un plan. Mais, pour obtenir celle des deux figures planes, il suffit de *retourner* l'une d'elles par rotation, autour de l'axe de symétrie. De même, deux systèmes de points pris sur une droite symétriquement par rapport à un point de cette droite ne peuvent être amenés à coïncider par un simple glissement de l'un d'eux sur la droite; mais la coïncidence s'obtient si l'on fait tourner

il en concluait, en 1768, à la réalité propre d'un espace absolu (voir *La Critique de Kant et la Métaphysique de Leibniz*, par M. Nolen, p. 153 et suiv.).

Digitized by Google

une moitié de la droite autour du centre de symétrie, de façon à la superposer à l'autre moitié.

Ces deux exemples nous montrent que deux figures symétriques, dans un espace à une ou à deux dimensions ne peuvent être superposées qu'après retournement de l'une d'elles, au moyen d'un mouvement s'opérant dans un espace à deux ou trois dimensions. De même, deux figures symétriques dans un espace à trois dimensions ne sauraient être amenées en coïncidence qu'après retournement de l'une d'elles dans un espace à quatre dimensions. Du moment donc qu'un tel espace nous fait défaut, nous ne saurions obtenir la superposition dont la possibilité apparaissait comme une exigence de la raison; mais nous ne nous heurtons qu'à une impossibilité de fait, tenant à ce que nous ne disposons pas de l'espace nécessaire pour donner à une de nos figures un mouvement qui serait indispensable. Cette impossibilité, mise en évidence par la géométrie analytique à trois dimensions, s'évanouit si nous introduisons dans notre analyse une quatrième dimension qui permette de faire tourner notre espace autour d'un de ses plans.

D'une façon générale et quel que fût le nombre des dimensions de l'espace dans lequel nous vivrions, les figures symétriques ayant le même nombre de dimensions ne seraient pas superposables, bien qu'identiques, parce qu'elles ne pourraient être retournées que dans un espace d'ordre supérieur.

Comme conclusion au présent paragraphe, nous pouvons dire qu'un espace géométrique nous apparaît comme un *quantum* continu dont le nombre des dimensions est celui des quantités nécessaires pour y déterminer un élément réduit à zéro, ou point. Ce qui distingue, d'ailleurs, la géométrie de toute autre science des quantités, c'est l'adaptation de la notion de quantité à des images *sui generis*. Les euclidiens sont dès lors fondés, semble-t-il, à dire que les géométries

Digitized by Google

non euclidiennes ne sont pas des géométries, puisque nous sommes impuissants à former des images adéquates des figures incompatibles avec l'espace euclidien ; mais, à vrai dire, toutes nos images sont imparfaites comme les figures matérielles, et le raisonnement géométrique porte sur les idées auxquelles sont associées les images et non sur celles-ci ; aussi importe-t-il assez peu que la divergence soit petite ou grande. S'il arrive qu'elle soit telle que nous ne puissions plus suivre sur les images la suite des conclusions de l'analyse, nous n'en concevons pas moins que des êtres doués d'une autre sensibilité pourraient posséder des images qui y répondissent aussi exactement que les nôtres répondent à la géométrie euclidienne.

Nous avons employé tout à l'heure une expression de nature à soulever quelques discussions : un espace, avons-nous dit, est un quantum *continu*. Nous savons fort bien qu'il est des surfaces et des lignes discontinues, et que l'on doit concevoir de même des espaces à trois dimensions discontinus. Mais, au point de vue où nous nous sommes placé et d'après lequel un espace peut être étudié en lui-même, sans le situer dans un espace d'ordre supérieur, deux nappes d'une même surface constituent deux espaces indépendants, ou identiques et indiscernables, pour parler plus exactement, si elles sont égales.

Quant au sens que nous attribuons au mot « continu », c'est celui des géomètres, et non celui que les analystes ont mis en honneur. Pour nous, dire qu'une ligne est continue, c'est dire que, étant donnés deux points sur cette ligne, il y répond toujours un point à toute valeur donnée, *quelle qu'elle puisse être*, du rapport entre les deux segments. M. Poincaré a fort bien montré [1] que, en partant de la défi-

1. *Le continu mathématique*, dans la *Revue de métaphysique et de morale* de janvier 1893.

Digitized by Google

nition des analystes [1], on est amené à admettre des continuités de plusieurs ordres, dont la première est donnée par des insertions n'ayant pour effet que de produire la division par la suite illimitée des entiers. Or, de telles continuités ne répondent pas à l'idée de continuité absolue, telle que nous l'avons définie et telle que l'admettent, croyons-nous, les géomètres, malgré le dédain de M. Poincaré, qui n'accorde pas plus d'importance à l'étendue qu'à la craie avec laquelle ceux-ci tracent leurs figures.

IV

VALEUR DE LA GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE

Après avoir fait connaître dans ses grandes lignes la géométrie des espaces identiques à eux-mêmes, géométrie évidemment très particulière, mais vraiment générale dans son esprit, il y a lieu de nous demander quelle en est la valeur, d'abord à un point de vue purement logique, puis à un point de vue largement philosophique.

Au point de vue de la pure logique, la géométrie générale, comme la géométrie euclidienne elle-même, à le bien prendre, apparaît comme entachée d'un vice qu'on croirait volontiers inéliminable : elle repose sur des définitions dont rien ne prouve la légitimité, et celle-ci ne se vérifie que peu à peu, par l'absence de contradiction dans la suite des déductions ayant ces définitions pour point de départ. Cette absence permet, sans doute, d'inférer que lesdites définitions ne contiennent aucune contradiction implicite ; mais on

1. Voir, par exemple, l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, par M. Jules Tannery, p. 103.

Digitized by Google

peut toujours supposer que, en poursuivant la chaîne des déductions, on arriverait enfin à une contradiction.

Les partisans exclusifs de la géométrie euclidienne ne manquent pas de déclarer que celle-ci échappe à une telle critique, car la légitimité des définitions fondamentales y résulte d'une *intuition* qui ne saurait tromper. Nous reviendrons tout à l'heure sur cette intuition ; pour l'instant, sans en discuter la valeur, nous allons montrer qu'elle permet de garantir l'absence de contradiction dans les définitions de la géométrie générale, exactement avec la même autorité qu'elle pourrait le faire pour la géométrie euclidienne.

A ce sujet, tout le monde a vu maintes fois reproduite la célèbre théorie du *Dictionnaire* de M. Poincaré, exposée par lui dans l'article déjà cité de la *Revue générale des sciences pures et appliquées* [1]. Cette théorie est ainsi formulée :

« Considérons un certain plan que j'appellerai fonda-
« mental et construisons une sorte de dictionnaire, en fai-
« sant correspondre chacun à chacun une double suite de
« termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que
« se correspondent, dans les dictionnaires ordinaires, les
« mots de deux langues dont la signification est la même. »

(Suit un extrait du *Dictionnaire*.)

« Prenons ensuite les théorèmes de Lowatschewski et
« traduisons-les à l'aide de ce dictionnaire comme nous tra-
« duirions un texte allemand à l'aide d'un dictionnaire
« allemand-français. *Nous obtiendrons ainsi des théorèmes de*
« *la géométrie euclidienne.* » (Suit un exemple.)

« Ainsi, quelque loin que l'on pousse les hypothèses de
« Lowatschewski, on ne sera jamais conduit à une contra-
« diction. En effet, si deux théorèmes de Lowatschewski
« étaient contradictoires, il en serait de même des traduc-

1. *Les géométries non euclidiennes*, dans le numéro du 15 décembre 1891.

Digitized by Google

« tions de ces deux théorèmes, faites à l'aide de notre dic-
« tionnaire; mais ces traductions sont des théorèmes de
« géométrie ordinaire. »

Réduit à ces termes, l'argument de M. Poincaré a été souvent invoqué sans que ses admirateurs parussent éprouver le moindre besoin de le compléter; pour nous, il ne nous satisfaisait guère, et nous avons d'abord regardé comme très juste une critique extrêmement vive qu'en a présentée M. Milhaud dans sa thèse *sur les conditions et les limites de la certitude logique*. Remarquant que M. Poincaré établit son dictionnaire sans paraître s'inquiéter aucunement du sens des vocables mis en regard des termes de la géométrie euclidienne, il formule une objection qui, contestable dans les termes généraux qu'il lui a donnés, semble irréfutable considérée dans les exemples, dont voici le premier:

« Je suppose que, partant d'une proposition acceptée de
« tout le monde, comme : certains nombres sont à la fois
« impairs et premiers (3, 5, 7, 11...), on tire telles consé-
« quences logiques qu'il plaira; puis, pour passer de cette
« chaîne de déductions à une autre, que l'on construise le
« vocabulaire que voici :

« Nombre se traduira	.....	Homme
« Impair —	.....	Vivant
« Premier —	.....	Mort

« On énoncera alors d'abord : *Certains hommes sont à la*
« *fois vivants et morts*. Puis, viendra une série de proposi-
« tions se succédant en bonne logique, comme celles dont
« elles seront la traduction. Qui songera à dire que la cor-
« respondance terme à terme de cette suite d'énoncés à une
« suite de déductions arithmétiques garantit l'absence de
« contradiction de ces énoncés[1] ? »

1. P. 156.

Digitized by Google

A s'en tenir à l'exposé de M. Poincaré, il nous semble que l'objection est convaincante; mais M. Calinon nous a montré que cet exposé, convenablement complété, a une tout autre signification et une tout autre portée que celle qui lui est attribuée par M. Milhaud. La chose vaut qu'on y insiste.

Le point de départ de M. Calinon est tout entier dans cette remarque fort simple que, lorsque l'on a constaté que plusieurs problèmes aboutissent au même système d'équations, il suffit d'en traiter un seul par la méthode algébrique, la solution trouvée convenant aux autres, sous réserve du sens particulier à donner aux inconnues dans chaque problème; c'est là ce qu'il appelle le principe des *transpositions*, principe ne soulevant aucune difficulté en arithmétique. En géométrie, ce principe trouve naturellement à s'appliquer, et même sa forme algébrique peut disparaître, tout en le laissant subsister au fond : c'est ce qui arrive dans la théorie classique des *figures corrélatives*, qui permet de passer sans démonstration d'un théorème à un autre, par une simple substitution de mots. Le dictionnaire de M. Poincaré n'est qu'une application de cette méthode. Sa légitimité repose sur le fait que les quantités euclidiennes et non euclidiennes qu'il met en regard sont liées, de part et d'autre, par les mêmes équations fondamentales, *que l'on démontre séparément dans l'une et l'autre géométrie.* Dès lors, si l'on admet que la géométrie euclidienne ne saurait aboutir à une contradiction, on est bien obligé d'admettre qu'il en est de même de celle qui s'en déduit par transposition, puisque l'une et l'autre ne sont que deux énoncés différents d'un même développement analytique.

Poussant la question plus loin que M. Poincaré, M. Calinon cherche à établir que ce développement analytique commun ne saurait, en effet, aboutir à une contradiction. La géométrie euclidienne repose tout entière sur les quatre données suivantes : 1° il y a une ligne, appelée ligne droite,

Digitized by Google

telle que par deux points il en passe toujours une et une seule ; 2° il y a une surface, appelée plan, telle qu'une droite qui a deux points situés sur cette surface y est située tout entière ; 3° la somme des angles d'un triangle rectiligne est la même pour tous les triangles ; 4° une figure peut se déplacer dans tous les sens en restant égale à elle-même. Or, les trois premières propositions s'expriment par la représentation du plan au moyen d'une équation de la forme :

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

si l'on prend trois axes de coordonnées, et par la représentation de la droite au moyen de deux équations du même genre. Quant à la quatrième proposition, elle est implicitement comprise dans cette autre proposition : Les formules relatives au changement des axes de coordonnées sont du premier degré [1].

L'analyse montre aisément que ces équations ne présentent aucune contradiction, d'où il suit que la géométrie euclidienne, qui n'est qu'une traduction des transformations de ces équations, ne saurait non plus en présenter. La méthode de M. Poincaré permet d'étendre cette proposition à la géométrie de Lobatschewski, à laquelle, du reste, on pourrait appliquer la méthode directe, en partant de ses trois propositions fondamentales, identiques aux propositions 1, 2 et 4 de celle d'Euclide.

Nous ajouterons qu'une démonstration de l'impossibilité de toute contradiction dans la géométrie générale avait été donnée par M. de Tilly, dès 1887, et présentée sous sa forme définitive dans un *Essai de géométrie analytique générale*, inséré parmi les *Mémoires* publiés par l'Académie royale de Bel-

1. La relativité du mouvement fait qu'un changement d'axes est équivalent à un mouvement de la figure.

Digitized by Google

gique [1]. Sans entrer dans les détails de cette démonstration, nous croyons devoir en indiquer le principe. Toute la géométrie peut se réduire, en dernière analyse, à des relations entre des distances, et ces relations elles-mêmes dépendent d'une relation unique entre n points, n surpassant de deux unités le nombre des dimensions de l'espace. Si ce nombre est de trois, n est égal à cinq, et les distances de ces cinq points arbitraires sont au nombre de dix ; mais la relation entre ces dix distances n'est pas arbitraire, si l'on veut que l'espace soit « homogène », c'est-à-dire que cette relation existe entre les distances de cinq points quelconques, pris n'importe où. A cette condition fondamentale, M. de Tilly en ajoute une, dite de « mesure », exprimant que, le long d'une ligne droite, les intervalles s'ajoutent, et, enfin, une troisième condition, celle de « continuité ».

Les formules auxquelles il arrive ainsi sont précisément celles de la géométrie générale des espaces que nous avons appelés identiques à eux-mêmes et différenciés entre eux par la valeur attribuée à un coefficient arbitraire.

Toutes ces formules ont été établies d'une façon purement analytique et ont simplement fait l'objet de traductions en langage géométrique : elles ont donc toutes exactement la même valeur logique. Or, le principe de la parallèle unique n'est vrai que pour l'une des valeurs du coefficient arbitraire ; dès lors, démontrer ce principe sans invoquer l'expérience équivaudrait à démontrer l'impossibilité, même théorique, des systèmes où ce principe n'existe pas, ce qui est contradictoire aux calculs présentés et ne serait possible que si ces calculs contenaient des erreurs.

Supposant admis que la géométrie générale ne saurait

1. Collection in-8°, t. XLVII. M. Mansion a donné ce mémoire en supplément à la livraison de décembre 1893 de son journal *Mathesis* (Gauthier-Villars).

Digitized by Google

présenter de contradiction (ou, tout au moins, qu'elle en est à l'abri dans la même mesure que la géométrie euclidienne), on ne s'en trouve pas moins en face d'adversaires implacables. Nous ne compterons point parmi eux ceux qui se bornent à l'écarter comme dépourvue d'intérêt. Par exemple, Stuart Mill admet avec le Dr Whewell que « non seulement une définition doit, pour être admissible, se rapporter nécessairement et être conforme à quelque conception distinctement formée dans l'esprit » mais encore que les lignes droites, par exemple, que nous définissons doivent être « celles par lesquelles les angles sont formés, celles par lesquelles les triangles sont limités, celles dont le parallélisme peut être affirmé, etc. ». Mais, pour lui, la raison d'être de cette exigence est que les conclusions qu'on pourrait tirer « d'hypothèses purement arbitraires... nous apprendraient seulement qu'elles *seraient* les propriétés d'objets qui n'existent pas réellement », « qu'elles n'ajouteraient rien à notre connaissance de la nature ». C'est là un point de vue en quelque sorte utilitaire, qui ne touche point à la portée philosophique des déductions fondées sur des définitions ne répondant pas aux objets réels, et Stuart Mill reconnaît que les conclusions qu'on pourrait tirer de ces hypothèses arbitraires « seraient un exercice intellectuel d'une haute utilité [1] ».

La théorie de l'*intuition*, telle que l'a présentée M. Delbœuf dans ses *Prolégomènes*, ainsi que nous l'avons déjà vu, constitue un moyen ingénieux de prendre pour point

1. Voir cette discussion dans le *Système de logique déductive et inductive*, trad. Peisse, t. I, p. 259 et 260.

La question de l'utilité pratique de la géométrie générale est en dehors de notre sujet. Rappelons, toutefois, que M. Poincaré a triomphé sans peine, grâce à elle, d'une difficulté rencontrée par lui dans cette théorie des fonctions fuchsiennes qui constitue l'un de ses plus beaux titres de gloire.

Digitized by Google

de départ les données sensorielles, tout en sauvegardant les droits de la raison dans l'établissement de la géométrie. Nous avons d'abord une intuition de la droite et du plan, puis nous cherchons un attribut qui réponde à cette intuition et permette de la remplacer par un concept [1]. Rien de plus légitime, sans doute, que de procéder ainsi; mais il est clair qu'en ce faisant on écarte tout concept contraire aux intuitions suggérées par nos impressions sensorielles. Or, écarter de tels concepts, ce n'est aucunement en démontrer l'illégitimité. Aussi M. Delbœuf s'efforce-t-il de montrer que la géométrie générale a ses postulats, analogues à ceux d'Euclide ; mais, pour le faire, il commet, selon nous, une très grave erreur sur la nature des définitions fondamentales. Ce que nous en avons dit précédemment nous permettra d'être bref. D'après lui, la définition ordinaire du plan (surface telle que la droite passant par deux quelconques de ses points y est contenue tout entière, ou surface sur laquelle une droite peut se déplacer dans tous les sens) étant surabondante, cette définition dissimule un postulat, celui de la possibilité de l'existence de cet objet. Or, ajoute-t-il, la définition de la surface identique à elle-même postule bien plus à savoir la possibilité d'une surface sur laquelle toute figure puisse être déplacée sans déformation [2].

Nous reconnaissons bien volontiers que la définition des surfaces identiques est surabondante, et qu'il y a là un défaut qu'il serait intéressant de faire disparaître ; mais ce défaut n'introduit aucun postulat, puisque, encore une fois, poser une définition fondamentale, ce n'est point affirmer la possibilité de son objet, cette définition devant être soumise à l'épreuve des déductions s'appuyant sur elle, et sa

1. P. 175. M. Delbœuf est resté fidèle à son ancienne conception (voir *Revue philosophique* d'août 1894, p. 129).
2. *Revue philosophique*, août 1894, p. 132.

Digitized by Google

légitimité ne devant résulter que de l'absence de contradiction dans ces déductions.

Ce n'est donc, à vrai dire, que par une série de malentendus que M. Delbœuf peut se maintenir en opposition avec la géométrie générale. Il n'en est pas de même d'un adversaire véritable de la géométrie générale, qui s'appuie également sur l'*intuition*, mais autrement comprise.

M. l'abbé de Broglie, auquel nous avons déjà eu l'occasion de rendre hommage, a publié dans les *Annales de philosophie chrétienne* une étude dont on ne saurait trop recommander l'examen approfondi[1]. Il s'est bien laissé aller à formuler certaines critiques que l'on pourrait dire à côté[2]; mais, dans l'ensemble, il a soutenu une thèse bien cohérente, sur laquelle nous devons insister un peu. A la base de la géométrie, il place l'intuition, chargée de nous faire voir la possibilité des ligne et surface prises comme point de départ de la géométrie. « L'intuition précède donc

1. Avril et juillet 1890, p. 5 et 340.

2. Tel est le reproche, renouvelé de Stallo (*La matière et la physique moderne*, p. 167), de faire de l'espace une chose réelle. « Des espaces distincts, dit M. de Broglie, espaces idéaux qui se refusent à recevoir des lignes et des figures idéales, qui se comportent à l'égard de ces figures comme s'ils étaient pleins et elles solides, qu'est-ce que cela signifie ? » Un espace n'étant, pour nous, que la substantialisation verbale des relations spatiales compatibles entre elles, dire qu'une figure ne peut entrer dans un espace, c'est dire qu'elle constitue un système de relations incompatible avec un système plus général, décoré du nom d'espace.

Il nous semble, du reste, que, en dehors de toute thèse métaphysique sur la nature de l'espace, il n'y a rien de choquant à dire qu'un triangle sphérique ne peut entrer sur une sphère idéale dont le rayon diffère de celui de la sphere à laquelle appartient ce triangle également idéal ; si un géomètre euclidien peut parler ainsi à l'occasion de deux espaces à deux dimensions, pourquoi ne parlerait-on pas de même, en géométrie générale, à l'occasion de deux espaces à trois dimensions?

Digitized by Google

la définition. L'intuition découvre l'objet..., le perçoit tel qu'il est. La définition vient ensuite ; elle exprime par des paroles, de son mieux, les caractères de l'objet perçu. » A cette occasion, M. de Broglie remarque très justement que les nouveaux géomètres ont recours à l'intuition, qui leur livre les notions de surface, de ligne, etc.; mais cette remarque n'est juste qu'en ce que, sans les impressions sensorielles, l'idée de quantité ou de grandeur ne s'associerait pas en nous aux images spéciales qui transforment la science générale de la quantité en science géométrique. Cette intuition, si l'on veut employer ce mot, est bien différente de celle qu'invoquait l'éminent professeur de l'Institut catholique de Paris, car elle donne seulement une *forme* à la science géométrique, sans lui fournir aucune vérité. La discussion est, d'ailleurs, très intéressante, parce qu'elle aborde la question par les grands côtés ; bien loin de se rejeter d'un postulat sur un autre, l'auteur s'est appliqué lui-même à établir, ainsi que nous l'avons déjà dit, qu'on peut démontrer une foule de propositions admises sans preuve dans les traités ordinaires, et il reconnaît nettement le caractère tout particulier du *postulatum* d'Euclide.

Avec beaucoup de raison, il en conclut que ce *postulatum* n'a pour rôle que de compléter la définition insuffisante de la ligne droite ; mais il tient pour absurdes tous les développements qui font abstraction de ce postulat et fait volontiers appel à l'intuition pour établir cette absurdité, par exemple quand il s'agit de condamner la notion d'une sphère retournable. Au fond, d'ailleurs, et malgré les plus énergiques condamnations de l'empirisme, M. de Broglie est bien obligé de s'appuyer sur les données sensibles [1] ; après avoir fière-

1 Un autre partisan de l'intuition, M. Rabier, reconnaît avec une parfaite netteté son infériorité : n'étant, comme le pensait Leibniz, « qu'une sorte de décalque de l'étendue sensible sur notre imagination », elle ne saurait constituer une preuve et

Digitized by Google

ment parlé des conceptions *a priori* de notre intelligence, il attribue, avec les scolastiques, l'origine de ces conceptions à l'abstraction « dégageant les essences des réalités contingentes,... des faits sensibles la notion de corps et la propriété d'étendue, »; « dans cette idée rationnelle de l'étendue, ajoute-t-il, se trouve comprise l'idée des trois dimensions..., le *postulatum* d'Euclide..., lié à la conception de la majoration possible des grandeurs, sans que les angles changent ».

Ainsi interprétée, la théorie scolastique nous enferme *a priori* dans la connaissance du réel et nous interdit la recherche du possible, puisqu'elle ne nous permet que de dégager des faits sensibles, par abstraction, les propriétés de l'étendue. Si telle était sa véritable portée, nous n'hésiterions pas à la répudier ; mais il paraît possible de l'interpréter d'une manière plus large, car l'un des principaux représentants des doctrines scolastiques, M. de Vorges, est venu à notre aide en rappelant le principe de saint Thomas, que Dieu peut tout ce qui n'implique pas contradiction (*C. Gent.*, II, 22) : « *Quidquid contradictionem non implicat, Deus potest* [1]. » S'il en est ainsi (et nous ne concevons pas comment un philosophe spiritualiste pourrait le nier), les définitions qui ne contiennent aucun élément de contradiction peuvent être incompatibles avec des vérités *de fait*, pourraient comme telles être repoussées par celui qui accorderait à notre espace une existence nécessaire, mais s'imposent à celui qui ne voit dans notre espace qu'une

ne fait qu'*illustrer* celle-ci. Si donc on la place, comme lui, à la base de la géométrie, celle-ci cesse, à vrai dire, d'être une science démonstrative pour ne plus reposer que sur la sensibilité et l'imagination (voir *Logique*, p. 273-284.)

1. *Annales de philosophie chrétienne*, sept. 1890, p. 578. Ajoutons une citation de Duns Scot : « *Omnipotentia Dei potestimmediate quodlibet quod non claudit contradictionem* » (*Sent.*, lib. I, dist. 42, q. 2).

Digitized by Google

œuvre de Dieu comme exprimant une possibilité que celui-ci aurait pu aussi bien réaliser.

Nous devons, cependant, signaler une réponse de M. de Broglie : « L'absence de contradiction dans la suite des déductions, dit-il, ne prouve pas que le point de départ ne contient rien d'impossible, correspond à des objets intelligibles et concevables, » et il cite comme exemple concluant celui des imaginaires : « Les raisonnements et les calculs sur les racines carrées de quantités négatives se suivent sans contradiction ; mais il n'en est pas moins vrai que tout carré est positif. »

L'objection ne laisse pas d'être spécieuse ; mais elle n'est que cela. Les imaginaires sont des écritures purement matérielles, auxquelles on convient d'appliquer mécaniquement les règles de calcul *démontrées* pour les quantités réelles, en sorte que ces règles servent de *définitions* aux opérations sur les quantités imaginaires. Dans ces conditions, il ne saurait y avoir de raisonnement, et tout ce qu'il faut pour ne pas être arrêté dans ses opérations, c'est de n'avoir introduit aucune contradiction dans les règles de calcul ; il ne peut, du reste, y en avoir, puisque ce sont les règles démontrées pour les quantités réelles. Tout autre est le cas de la géométrie générale, car elle raisonne sur des idées, si bien qu'elle forme une suite de déductions régulières, au dire de M. de Broglie ; cette suite tire d'elle-même sa valeur, tandis que la série d'écritures qualifiées d'égalités entre imaginaires n'a d'autre source que les règles relatives aux quantités réelles. La géométrie générale apparaît donc avec une valeur propre, qui ne s'appuie pas sur la géométrie euclidienne, simple cas particulier, tandis que, si les quantités réelles sont aussi des cas particuliers des imaginaires, en un certain sens, elles servent de base essentielle à celles-ci. En un mot, les raisonnements autonomes de la géométrie générale éprouvent la valeur de sa base, tandis que les opérations

Digitized by Google

mécaniques sur les imaginaires ne vérifient que l'absence de contradiction dans les règles de calcul démontrées pour les quantités réelles.

Ampère, parlant de l'indémontrabilité du postulat, disait aussi lui que sa certitude résultait de l'intuition; mais il y ajoutait un qualificatif caractéristique, disant qu'il s'agit là d'une intuition *synthétique* [1], en sorte que M. Rabier, qui reconnaît aux axiomes propres, ou postulats, le caractère synthétique et les fait dériver de l'intuition, n'a fait que développer la pensée ainsi indiquée. Suivant de très près M. Renouvier, il se sépare de lui en ce qu'il enseigne que les propositions synthétiques ne peuvent avoir d'autre fondement que l'expérience, qu'elle soit externe et sensible, ou interne et d'intuition, tandis que l'illustre chef du néocriticisme invoque les jugements synthétiques *a priori* de Kant contre la géométrie générale. Ce qu'il y a d'essentiel dans la critique de M. Renouvier, c'est l'idée que tous les postulats (car, pour lui, il y en a beaucoup) reposent sur une synthèse de deux catégories différentes, la forme et la quantité, laquelle ne pourrait qu'être posée *a priori*, à titre d'*impératif géométrique*, analogue à l'impératif catégorique qui sert de fondement à la morale. Il y a là une pensée évidemment profonde, que nous avons déjà discutée à propos de l'égalité géométrique et du prétendu postulat de la perpendiculaire. Nous ne saurions nous arrêter à chacun des postulats qu'il énonce ; mais nous signalerons la forme imprévue qu'il donne à celui des parallèles. Il en fait le postulat de la rotation ou du *tour de l'horizon :* la somme des angles extérieurs d'un polygone convexe fermé est égale à quatre droits ou, en d'autres termes, « la révolution périmétrique accomplie suivant une ligne polygonale fermée fournit la même mesure angulaire que s'il s'agissait du pivotement sur un point,

1. *La Philosophie des deux Ampère*, p. 278.

Digitized by Google

sans aucun périmètre ». Assurément, c'est bien là un équivalent du postulatum d'Euclide, mais un équivalent imprévu, en ce sens qu'il est bien moins intuitif.

Dire que M. Renouvier reconnaît l'indémontrabilité du postulatum, c'est dire qu'il admet l'absence de contradiction dans les développements actuels et futurs de la géométrie non euclidienne, et dès lors se pose la question de savoir comment il peut écarter la valeur de cette construction logique vraiment monumentale. Il le fait par une distinction entre l'absurde et le contradictoire. Faute d'avoir, comme il le dit, suffisamment étudié la logique, nous avouons ne pas saisir la distinction, si ce n'est que le terme « absurde » présente une moindre précision et peut, d'après l'usage, s'appliquer, dans les sciences de fait, à ce qui est en désaccord avec une vérité d'expérience qu'on juge bien établie. Mais, dans une science apriorique, absurde et contradictoire nous paraissent rigoureusement synonymes : c'est ainsi que les démonstrations *par l'absurde* reposent sur une *contradiction.*

Au fond, il faut toujours en revenir, sous une forme plus ou moins dissimulée, à invoquer les données sensitives. Répondant, dans la *Revue philosophique* [1], à une première version de la *Philosophie de la règle et du compas*, parue dans la *Critique philosophique* [2], nous reconnaissions, comme nous l'avons fait ci-dessus, l'impossibilité où nous serions d'établir une géométrie si nous ne possédions pas d'images spatiales ; puis, nous ajoutions : « Ce qui nous importe, ce n'est point de ne rien devoir aux notions dues à la forme réelle de notre sensibilité, car nous n'avons jamais contesté qu'elles nous sont indispensables pour la formation d'une géométrie

1. Août 1890. *La géométrie générale et les jugements synthétiques a priori.*
2. Novembre 1889, p. 337.

Digitized by Google

quelconque [1], mais de reconnaître que cette forme pourrait être autre qu'elle n'est, tout en conservant des lois rationnelles générales ne relevant que du principe de contradiction [2]. »

Voici ce que M. Renouvier nous répond : « Si la forme réelle de la sensibilité et les notions qui s'y rattachent sont indispensables pour la constitution d'une géométrie *quelconque*, comment admettre l'établissement *logique* d'une géométrie qui serait un système de relations étranger à l'espace ordinaire, indépendant du « postulat des trois dimensions », et dont il n'y a pas d'image ? Peut-il *ne point importer* de ne rien devoir aux notions susdites, alors que *ne leur rien devoir* est justement ce qu'il faudrait, et, ce qui ne se peut, pour en établir d'autres qui leur sont opposées ? Mais la forme de la sensibilité pourrait être autre qu'elle est; je le veux bien, c'est une possibilité métaphysique. Dans ce cas, on ne serait pas forcé de supposer la forme d'à présent pour combattre les notions qui lui sont « dues » ! Et cette autre forme pourrait « conserver des lois rationnelles générales », c'est encore possible; ce qui ne l'est pas, c'est que ces lois pussent, comme dit M. Lechalas, « ne relever que du principe de contradiction ». Ce principe n'a pas la vertu de fournir des propositions premières, attendu que son application en suppose toujours une ou plusieurs auxquelles on se soit interdit de contredire [3]. »

Il semble que M. Renouvier a interprété notre expression

1. En relisant cette phrase isolée, nous voyons qu'on peut la mal interpréter : pour établir une géométrie quelconque, on a besoin d'un système d'images, *conforme ou non au nôtre ;* mais il en faut un absolument, car à son défaut on ne ferait que de l'analyse.

2. On a vu que nous y ajoutons celui de raison suffisante comme moyen de démonstration.

3. *L'Année philosophique*, 2e année, p. 63.

Digitized by Google

incorrecte dans le sens inexact signalé à la note 1 de la page précédente; mais il y a plus, et cela nous révèle un nouveau défaut de notre rédaction, puisque notre pensée ne paraît pas avoir été saisie sur un second point : l' « autre forme » de sensibilité que nous supposons fournirait les propriétés permettant de formuler les définitions fondamentales de la géométrie, et c'est en partant de ces définitions que l'application des lois rationnelles, *indépendantes de la forme particulière de la sensibilité*, donnerait le développement de la géométrie correspondant à cette forme. Reste l'aveu de M. Renouvier, que l'existence d'autres formes de sensibilité est une possibilité métaphysique, et cet aveu nous paraît capital, car il semble qu'il nous donne cause gagnée [1].

En particulier, il ne permet guère de contester que le nombre des dimensions n'a rien de nécessaire; or, pour qui a admis ce point et en a bien compris la portée, les principes de la géométrie générale ne doivent soulever aucune objection fondamentale, car de la possibilité d'un espace à quatre dimensions découle immédiatement celle de plusieurs espaces, ou plutôt d'une infinité d'espaces à trois dimensions, différant entre eux soit par leurs natures, soit seulement par leurs situations dans l'espace d'ordre supérieur [2].

Or, nous ne voyons vraiment pas ce qu'on peut opposer à

1. Un autre aveu précieux à recueillir concerne la qualification d'*impératifs géométriques* donnée aux postulats. M. Renouvier, pour la justifier, dit que ce « sont les notions nécessaires à l'esprit pour constituer une géométrie (?), *bien plus pour juger les objets extérieurs et régler les arts de la vie en conséquence* » (*Deuxième année philosophique*, p. 64).

2. M. l'abbé de Broglie a bien saisi la liaison de ces deux notions; mais, pour lui, « cette analogie vaine (entre les diverses surfaces et les divers espaces à trois dimensions) est comme une sorte de plan incliné sophistique conduisant au pays des chimères les esprits inattentifs et amis du paradoxe ».

Digitized by Google

la possibilité métaphysique, selon l'expression de M. Renouvier, d'un système de formes sensibles à quatre variables. Au début de sa vie philosophique, Kant l'avait bien compris : mêlant d'une façon contestable la loi de l'attraction à celle des propriétés de l'espace et du nombre de ses dimensions, il arrivait à concevoir divers espaces possibles, dont la science « serait, sans doute, la plus haute géométrie qu'un entendement fini puisse concevoir [1] ».

V

PORTÉE PHILOSOPHIQUE DE LA GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE

Il nous semble que de toutes les discussions qui précèdent se dégage naturellement une conclusion philosophique du plus haut intérêt. Si la géométrie générale est bien telle que nous avons essayé de la montrer, c'est-à-dire si, partant de la notion de grandeur spatiale, due à la synthèse de l'idée de quantité et des images qu'évoque en nous l'exercice de notre sensibilité, elle pose, au moyen de propriétés caractéristiques, la définition des formes servant de

1. *Pensées sur la véritable mesure des forces vives* (voir l'ouvrage de M. Nolen sur *La critique de Kant*). On ne saurait vraiment trop déplorer la déchéance subie par la pensée du philosophe de Kœnigsberg, quand de cette pensée si large on rapproche ses conceptions de l'Esthétique transcendentale, où, pour déterminer les caractères de la forme *a priori* de notre sensibilité, il se borne à reproduire, sans aucune critique, les caractères expérimentaux de l'espace, en y ajoutant cette sorte de nécessité que lui confère l'imagination : « On ne peut jamais concevoir, dit-il, qu'il n'y ait aucun espace, quoiqu'on puisse fort bien penser qu'aucun objet n'y est contenu... On ne peut se représenter qu'un seul espace ; et, quand on parle de plusieurs

Digitized by Google

base à ses constructions, puis en déduit toutes les autres formes, au moyen de définitions génétiques fondées sur les premières, et démontre alors toutes les propriétés autres que celles qui servent de définition, sans faire appel à aucun principe qui ne soit ou purement analytique ou une simple application du principe de raison suffisante, alors cette science forme un ensemble harmonieux, satisfaisant parfaitement la raison. A la base, nous faisons appel à la sensibilité, parce que c'est elle qui imprime une forme spéciale à une branche de la science des grandeurs ; mais cette science en elle-même reste purement rationnelle. Nous posons, arbitrairement si l'on veut, des définitions fondamentales ; mais, d'une part, il faut bien savoir sur quoi l'on va raisonner, et choisir l'objet de son étude n'est point exclure ceux qu'on ne choisit pas : c'est seulement en ajourner l'étude, et la géométrie générale n'est point limitée en principe aux espaces identiques à eux-mêmes ; d'autre part, en posant ces définitions, on n'affirme pas l'existence des formes définies, ce qui serait revenir, sous une forme déguisée, au régime des postulats, car on soumet ces définitions à l'épreuve d'une suite prolongée de déductions, prêt à les rejeter si l'on découvre qu'elles aboutissent à une contradiction. Nous avons vu, d'ailleurs, que MM. de Tilly et Calinon paraissent bien avoir démontré l'impossibilité d'une contradiction, ce qui assure à la géométrie des espaces identiques la même apodicticité qu'à l'analyse elle-même.

Parmi toutes ces géométries, il en est une qui répond à

espaces, on entend seulement par là les parties d'un seul et même espace » (*Critique de la raison pure*, Esth. transc., sect. I, de l'Espace, § 2). Après une telle déclaration, on n'est pas surpris de voir citer, comme exemple du caractère apodictique des propositions géométriques, celle d'après laquelle « l'espace n'a que trois dimensions » (*Idem*, § 3).

Digitized by Google

nos intuitions, c'est-à-dire aux formes spéciales de notre sensibilité. Longtemps on a cherché à établir cette géométrie spéciale comme étant la seule possible, la seule rationnelle; mais on devait échouer dans cette tentative, et il fallait toujours introduire, sous une forme ou une autre, un postulat excluant toutes les autres géométries. Ce n'est pas à dire qu'un postulat fût nécessaire en principe, car rien n'empêche évidemment de définir l'objet spécial de la géométrie euclidienne, et c'est ce qu'a fait d'une façon si heureuse M. Delbœuf, tout en se méprenant sur le caractère de ses définitions; mais, pour cela, il fallait donner une définition de l'*espace* ou, du moins, de ce qu'on appelait ainsi et de ce qu'on ne songeait point à distinguer des autres espaces à trois dimensions. Tant qu'on n'a pas fait cette distinction au départ, il a fallu la faire en cours de route et, du moment qu'on n'admettait pas l'idée d'autres espaces, il fallait bien affirmer sans preuve, *postuler* quelque théorème équivalent à l'élimination de tous ces espaces.

A l'humble aveu d'impuissance du simple géomètre, le philosophe vient substituer une hautaine affirmation : cette proposition indémontrable n'est pas unique, mais, pour indémontrables qu'ils sont, ces postulats, comme on les nomme, n'en sont pas moins des lois nécessaires de notre sensibilité, dit l'un, de notre raison, dit l'autre; ce sont des impératifs dont le rejet nous rend incapables de constituer une géométrie, comme le rejet de l'impératif catégorique nous rend incapables de régir notre conduite intérieure.

Mais voici venir un empiriste qui toujours a soutenu que les vérités dites nécessaires ne nous paraissent telles que par suite d'une expérience incessamment renouvelée; de quel sourire n'accueillera-t-il pas ces assertions si énergiques ? Eh ! quoi, voilà un nouveau genre de vérités nécessaires; vous prétendiez me faire incliner devant ce que vous nommez des démonstrations, mais maintenant il faut m'in-

Digitized by Google

cliner aussi devant des propositions que rien ne distingue, à première vue, des autres : votre impuissance, reconnue par vous-même, à les prouver suffit à les transformer en intuitions ou en jugements synthétiques *a priori !* Ne voyez-vous donc pas que l'expérience seule qui vous a permis de former une image de parallèles, de vérifier la somme des angles d'un triangle, vous inspire cette foi aveugle en d'indémontrables propositions ? Et, puisque l'on prend ainsi sur le fait le résultat d'une expérience toujours constante, combien n'est-on pas fondé à croire que c'est elle aussi qui, mieux dissimulée, fait toute la valeur des plus belles démonstrations [1] ?

En face d'un tel adversaire des théories rationalistes, combien n'est pas plus forte la position de celui qui fait la part de l'expérience à côté de celle de la raison ? Les formes géométriques possibles, dit-il, ne sont point limitées à celles qui peuvent prendre place dans notre univers, à celles que notre imagination peut se figurer. Il en est d'autres, conçues par la raison, qui pourraient être réalisées dans un autre univers, meubler, pour ainsi dire, d'autres imaginations. Entre l'infinité de géométries également ra-

1. On sait que tel a été, ou à peu près, le langage des premiers néogéomètres qui ont eu l'idée de philosopher. « Les disciples de la nouvelle école, dit Stallo, se placent fermement sur le terrain empirique ; leur toute première proposition c'est que toutes les vérités géométriques sont d'origine empirique, que tout ce que nous savons de l'espace ou de ses propriétés est ce que nous en apprend l'expérience sensible » (*La matière et la physique moderne*, p. 166). Puis, le savant américain fait justement remarquer ce qu'il y a de piquant à voir les néogéomètres ériger un édifice transcendental sur des fondements empiriques, tandis que les plus illustres champions de la vieille croyance géométrique, en défendant les données familières de l'expérience sensible et en combattant ce qu'il appelle « les divagations de la géométrie transcendentale », invoquent l'origine non empirique de notre idée d'espace et de ses relations essentielles.

Digitized by Google

tionnelles, la raison ne saurait faire un choix; mais l'expérience peut révéler celle qui est réalisée dans notre univers, nous pouvons demander à notre imagination les formes dont elle vit. Ainsi l'homme, placé sur la terre, la crut d'abord plane, puis reconnut qu'elle est sphérique : c'est à l'expérience qu'il dut demander la nature de la surface. sur laquelle il vivait. A l'expérience aussi nous devons demander dans quel espace à trois dimensions nous sommes plongés. La seule différence consiste en ce que nos ancêtres avaient l'expérience de diverses surfaces, tandis que nous n'expérimentons qu'un seul espace, ce qui nous induit à le croire nécessaire; mais la raison nous ouvre les yeux et nous fait comprendre que notre imagination ne saurait limiter les formes possibles. La raison dépasse donc de beaucoup la réalité extérieure et notre sensibilité, et l'indémontrabilité de certaines propositions ne fait que prouver que celles-ci sont le simple énoncé des propriétés particulières à notre espace.

Ajoutons que la possibilité même d'une influence de nos perceptions sur nos conceptions géométriques a été niée par des partisans de la géométrie générale; mais nous remettrons au chapitre III la discussion de cette opinion.

Digitized by Google

CHAPITRE II

LE TEMPS ET L'ESPACE EN MÉCANIQUE

La mécanique comprend deux parties bien distinctes : la cinématique, que Kant désignait sous le nom de phoronomie [1], et la dynamique. Il convient d'envisager séparément ces deux sciences spéciales, où le temps et l'espace lui-même apparaissent sous des caractères bien distincts.

I

CINÉMATIQUE

« La cinématique étudie le mouvement au point de vue « géométrique. Elle introduit cependant une notion nou- « velle : le *temps*, dont on ne tient pas compte dans les « mouvements qu'étudie la géométrie ordinaire. » Ainsi s'exprime un des meilleurs traités de mécanique que nous connaissions et auquel nous ferons plus d'une fois allusion [2].

Après avoir constaté que le temps n'est pas susceptible

1. Voir les *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature*, traduction Ch. Andler et Ed. Chavannes.
2. *Mécanique générale*, par A. Flamant, p. 110.

Digitized by Google

de définition, M. Flamant continue dans les termes suivants, qui sont de nature à provoquer bien des réflexions : « Le « temps, comme l'espace, est partout semblable à lui-même « et *infini*. Nous ne pouvons nous en faire une idée précise « qu'en y supposant[1] des repères ou époques fixes, à partir « desquels nous mesurons, au moyen d'une unité arbi- « traire, les distances d'autres repères ou époques déter- « minés. — L'unité de temps sera un intervalle de temps « compris entre deux instants bien définis... L'unité de « temps la plus généralement usitée en mécanique est la « *seconde :* intervalle entre deux passages successifs, par la « verticale, d'un pendule simple dont la longueur serait, à « Paris, de $0^m,99384$. »

Pour qui réfléchit, cette définition de l'unité de temps, à la base d'une science mathématique, doit paraître bien singulière, car, avant de choisir l'unité de temps, on a besoin de savoir reconnaître des temps égaux, semble-t-il. C'est là le problème fondamental, car il importe au fond assez peu que l'*échelle* du temps soit plus ou moins grande ; c'est, disons-nous, le problème fondamental, à moins qu'il ne se trouve qu'au contraire ce problème ne réponde point à une question qu'on doive aborder pour étudier la cinématique. Or, en fait, la série des théorèmes se déroule sans qu'à aucun moment on éprouve le moindre embarras causé par l'absence d'une définition de temps égaux et sans que, d'autre part, intervienne, en quoi que ce soit, le choix indiqué de l'unité de temps : celui-ci n'apparaît que lorsqu'il s'agit de décrire un phénomène naturel particulier.

De cette remarque on est fondé à conclure que la cinématique ne suppose aucunement qu'on sache reconnaître des temps égaux, ou plutôt, puisqu'on y introduit le temps

1. M. Flamant remarque en note qu'on peut contester la possibilité de ces repères fixes.

Digitized by Google

comme variable indépendante, à laquelle on attribue successivement toutes les valeurs, cela montre que l'on peut choisir arbitrairement les mouvements que l'on conviendra, *par définition*, de considérer comme répondant à des temps égaux ; par exemple, nous pourrons prendre comme temps égaux ceux qui répondent au parcours d'arcs égaux quelconques par le pendule, et nous aurons même une définition bien plus commode que celle de M. Flamant, car nous décomposerons ainsi le temps en instants aussi courts ou aussi longs que nous le désirerons, au lieu de n'avoir, directement du moins, qu'une décomposition en unités indivisibles.

Aussi, d'une façon générale, est-il préférable de mesurer le temps au moyen d'espaces égaux parcourus par un mobile quelconque. Si deux mobiles différents se meuvent suivant la même loi, c'est-à-dire si à deux espaces égaux quelconques parcourus par le premier en répondent deux autres, différents des précédents, mais égaux aussi entre eux, les deux mesures du temps qui y correspondent sont concordantes, à l'échelle près, et nous dirons que les deux mouvements ne sont pas distincts l'un de l'autre, au point de vue de la définition de temps égaux.

Ces considérations trouveront bientôt leur application ; mais, pour l'instant, l'essentiel est de bien se rendre compte que le temps joue simplement, en cinématique, le rôle d'une variable indépendante quelconque, en fonction de laquelle se déterminent les coordonnées des points considérés. Alors il est tout naturel d'élargir la notion de la cinématique et de la dégager de la notion de temps, pour en faire une science purement géométrique. M. Delbœuf avait bien vu cela ; mais il en a seulement glissé une indication au milieu de l'exposé d'une théorie de la mécanique dont nous n'avons pu saisir les avantages[1]. A M. Cali-

[1] *Essai de logique scientifique*, p. 154.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
Digitized by Google

non, croyons-nous, appartient l'honneur d'avoir mis le premier cette vérité en pleine lumière et d'en avoir tiré parti par une exposition conforme de la cinématique[1].

Précisons bien la pensée fondamentale de cette simple application de la géométrie. Soient deux courbes S et T, sur lesquelles les positions des divers points sont déterminées par leurs distances s et t à deux points pris pour origines des arcs. On peut établir une relation point par point entre ces deux courbes, de telle sorte qu'à tout point de l'une en réponde un de l'autre; c'est ce qu'on obtiendra en posant une relation entre s et t, telle que $s = f(t)$. Dans tout cela, non seulement il n'y a pas de temps, mais il n'y a même pas de mouvement; cela n'empêche aucunement, si l'on appelle *vitesse* d'un point de la courbe S la dérivée de l'arc s qui y répond par rapport à l'arc t correspondant[2], tirée de l'équation précédente, et *accélération* du même point la dérivée seconde de s, cela n'empêche point, disons-nous, de démontrer tous les théorèmes de la cinématique. Il suffira, pour leur rendre leur signification ordinaire, de concevoir deux points mobiles décrivant simultanément les arcs s et t et de prendre comme mesure du temps la longueur de l'arc t : la cinématique proprement dite n'est donc qu'une application particulière d'un simple exercice de géométrie. Les *théorèmes* de la cinématique sont dès lors indépendants du choix de la variable indépendante, c'est-à-dire du mouvement-unité; mais la description de mouvements particuliers, les *lois expérimentales* auxquelles ils obéissent en dépendent essentiellement, car,

1. Voir son *Essai critique sur la mécanique* (Berger-Levrault, 1885).

2. Nous rappelons que la dérivée d'une fonction est la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable indépendante, lorsque ce dernier tend vers zéro.

Digitized by Google

si la forme de la trajectoire reste la même, la valeur de la vitesse en chaque point change avec la variable, et l'accélération change à la fois de valeur et de direction[1].

Une autre question de grande portée surgit si nous plaçons les trajectoires des mobiles dans un espace à trois dimensions. Les positions de ceux-ci se trouvent déterminées par rapport à un système d'axes de coordonnées pris comme repères et *relativement* auxquels tous les mouvements sont déterminés. Quelque opinion qu'on professe sur l'espace et le mouvement absolus, on doit reconnaître que, au point de vue de la cinématique pure, le choix de ces axes est complètement indifférent. En disant cela, nous ne parlons pas d'un choix entre des axes différents, mais immobiles les uns par rapport aux autres, car ces divers systèmes, distincts géométriquement, ne le sont pas en mécanique, attendu qu'ils ne modifient en rien les trajectoires, vitesses et accélérations. « Il ne faut donc pas oublier, dit M. Calinon, qu'un changement de repères consiste toujours dans le choix d'un second système d'axes *en mouvement* par rapport au premier. »

Ceci posé, les théorèmes de cinématique ne sont en rien modifiés par un changement du système d'axes, puisqu'ils ne constituent que des théorèmes de géométrie revêtus d'une forme mécanique. Mais, comme tout à l'heure, à l'occasion de la variable indépendante, il n'en est point de même de la *description* d'un mouvement particulier, c'est-à-dire de ses *lois* propres. La forme de la trajectoire dépend, en effet, du système d'axes, c'est-à-dire que, restant la

1. Nous rappelons que deux variables indépendantes ne sont vraiment distinctes que si leurs accroissements ne sont pas proportionnels, et, par suite, deux mouvements-unités ne sont vraiment distincts que si des temps égaux pour l'un d'eux sont inégaux pour l'autre.

Digitized by Google

même, elle revêt une autre apparence, et, alors même que, par un cas très particulier, le mouvement servant à mesurer le temps serait resté en concordance avec le premier, vitesses et accélérations seraient changées en grandeur et en direction[1].

Ceci nous permet de prévoir que le double choix du système d'axes et du mouvement servant de mesure au temps peut ne pas être indifférent, lorsqu'on entreprend la description des mouvements d'un système matériel ou, en termes plus scientifiques, l'établissement des équations exprimant ces mouvements.

A vrai dire, jusqu'à l'époque de Copernic et de Galilée, le problème du choix des axes (car celui du mouvement-unité n'était pas en discussion) se posait à un point de vue purement cinématique, et l'antiquité grecque a produit les systèmes les plus variés, en se plaçant exclusivement à ce point de vue : le système héliocentrique complet, comportant la circulation de la terre et des planètes autour du soleil et la révolution diurne de la première autour de son axe, a été enseigné lui-même, notamment par Aristarque de Samos, au IIIe siècle avant Jésus-Christ. « Comment, dit à ce propos M. Mansion, les Anciens, qui ont connu le système héliocentrique, ne l'ont-ils pas préféré au système géocentrique, dit de Ptolémée ? Quelles raisons ont pu faire choisir le plus imparfait, le moins simple des deux systèmes ? » Le savant professeur de l'Université de Gand répond à cette question par deux raisons, l'une d'ordre pratique, l'autre d'ordre philosophique.

En ce qui concerne les prédictions astronomiques et le calcul des coordonnées géographiques, il est naturel de se

1. Notons toutefois que, si les nouveaux axes étaient animés d'un mouvement de translation uniforme par rapport aux précédents, les accélérations ne seraient pas changées.

Digitized by Google

placer au point de vue géocentrique, et la perfection de l'*Almageste* de Ptolémée, dressé dans ce système, en rendait l'abandon difficile. D'autre part, les Anciens rattachaient à des sciences distinctes l'astronomie et la physique, la description des phénomènes célestes et la recherche des causes des mouvements des astres. Dès lors, selon l'expression de Posidonius, « il est indifférent pour l'astronome de savoir ce qui est immobile et ce qui se meut ». Toutefois, nous voyons Ptolémée introduire une considération *physique* dans le choix de ses axes, car, s'il écarte l'hypothèse de la rotation diurne de la terre, qui expliquerait plus simplement les mouvements des astres, c'est afin de pouvoir se rendre compte du mouvement des nuages et autres objets dans l'atmosphère.

Saint Thomas d'Aquin, dans son commentaire sur le *de Cœlo* d'Aristote, enseigne le caractère on peut dire fictif des suppositions des astronomes, qui expliquent les apparences, mais ne sont pas vraies pour cela [1]. M. Mansion [2] voudrait étendre à Copernic cette indifférence pour les hypothèses des astronomes ; mais lui-même cite un passage où Copernic déclare le mouvement de la terre *plus probable que son repos* [3]. Qu'importe qu'il ne soit question que de probabilité et non de certitude ? le vrai savant est sobre d'affirmations tranchantes, et, d'ailleurs, le sujet était alors assez délicat pour qu'on ne fût pas porté à forcer l'expression de sa pensée.

Quoi qu'il en soit, on peut remarquer que le débat n'était pas posé avec la précision scientifique qu'il requiert, car

1. Ad lect. XVII, lib. 2.

2. *Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la mécanique et de l'astronomie* (Gauthier-Villars, 1893).

3. *Vides ergo quod ex his omnibus probabilior sit mobilitas terræ quam ejus quies, præsertim in quotidia revolutione, tanquam terræ maxime propria* (*Des Révolutions*, lib. I, c. VIII).

Digitized by Google

on parlait d'hypothèses vraies ou non, alors qu'on n'aurait dû parler que du choix de coordonnées ; mais la métaphysique du mouvement absolu s'imposait à tous les esprits. Quand l'orage éclata sur la tête de Galilée, combien de gens s'émurent en faveur de cette vaine idole? ce n'est pas, certes, que l'émotion ne fût en soi légitime, car ce n'était rien moins que tout l'avenir de la science qui était en jeu, comme nous le verrons en traitant de la dynamique; mais, comme il arrive souvent, la masse s'émut justement, tout en se trompant sur le vrai point en cause.

Mais laissons cette digression, pour achever de préciser la question du choix des axes et son importance, au point de vue de la seule cinématique. Il ne suffit pas de prendre un système d'axes par rapport auquel le centre du soleil soit en repos, pour obtenir les simplifications de formules que procure le système héliocentrique complet : il faut encore préciser ce système et choisir convenablement le mouvement-unité servant à la mesure du temps. Sur le premier point on remarquera que, si l'on prend pour origine le centre même du soleil, celui-ci sera forcément immobile, mais qu'on pourra donner au système un mouvement quelconque autour de ce point, par rapport à un autre système; or, les lois les plus fondamentales de l'astronomie perdraient toute leur simplicité si, parmi ces systèmes ayant le centre pour origine, on ne faisait pas encore un choix convenable. Supposons, par exemple, qu'on prenne des axes invariablement liés à toute la masse du soleil, de façon à supprimer le mouvement de rotation qu'il possède avec les axes en usage : c'en sera fait des lois de Képler. Étant donné, en effet, que les plans des écliptiques des diverses planètes ne coïncident pas avec celui de l'équateur solaire, on voit que les orbites planétaires ne seraient même plus des courbes planes, et, quant à la loi des vitesses angulaires, elle ne serait plus vérifiée, alors même que les écliptiques

Digitized by Google

coïncideraient avec l'équateur solaire. Pour que les lois de Képler soient vérifiées, il faut que les axes des coordonnées soient invariablement reliés aux astres qu'on appelle étoiles fixes, et dont les distances angulaires restent invariables.

Cela ne suffit pas encore, et il faut choisir convenablement l'unité de mouvement. Si l'on prenait, par exemple, le mouvement angulaire de la terre autour du soleil, il en résulterait, non seulement que les vitesses de rotation des astres sur eux-mêmes ne seraient plus constantes, mais encore que les vitesses de leurs révolutions autour du soleil ne seraient plus données que par des formules très compliquées et que ne relierait plus une loi générale.

Donc, à s'en tenir à la simple description cinématique des phénomènes, on est amené à un choix déterminé du système d'axes et du mouvement-unité, si l'on veut pouvoir exprimer par des formules simples les phénomènes astronomiques. Et alors s'impose cette question : l'existence d'un système d'axes et d'un mouvement-unité jouissant, à l'exclusion de tous autres [1], de la propriété de produire cette simplicité ne montre-t-elle pas qu'on doit admettre l'existence du mouvement absolu, comme du temps absolu?

Il est incontestable que le choix des axes et du mouvement-unité a cessé de présenter ce caractère arbitraire que lui laissait la cinématique pure, et nous reconnaissons volontiers que, pour qui pose l'existence du mouvement et du temps absolus à titre de postulat, il est légitime de conclure que ces systèmes privilégiés nous les font connaître, sous réserve toutefois de la possibilité d'une translation uniforme. Mais nous ne saurions admettre que leur

1. Nous rappelons encore une fois que ne sont distincts ni deux systèmes d'axes immobiles l'un par rapport à l'autre, n deux mouvements-unités où à deux espaces égaux de l'un répondent toujours deux espaces égaux de l'autre.

Digitized by Google

existence constitue un argument de quelque valeur en faveur de la réalité même du mouvement et du temps absolus. A supposer, en effet, que la description cinématique de l'univers puisse être réduite à des lois ou des formules simples, il est inévitable que cette simplicité soit rigoureusement subordonnée à un choix convenable des axes et du mouvement-unité ; si donc l'auteur de la nature a voulu faire une œuvre intelligible, pour ainsi dire, il n'a pu le faire que par rapport à des axes et à un mouvement-unité déterminés. D'où l'on doit conclure que cette subordination est absolument indépendante de l'hypothèse d'un mouvement et d'un temps absolus.

Nous ne devons pas nous dissimuler que, aux yeux de bien des personnes, rien n'est plus arriéré que de parler de la simplicité des lois de la nature. Les critiques que l'on a faites de cet ordre de considérations ont un fondement incontestablement sérieux. Quand Descartes, par exemple, accorde une supériorité de simplicité à la division d'un intervalle par la proportion arithmétique à sa division par la proportion géométrique, il se trouve contredit par les lois de l'acoustique, en sorte que M. Bouasse peut se demander en quoi consiste la simplicité d'une formule[1]. Mais ne voit-on pas ce qu'il y a d'exagéré à forcer cette objection, car qui pourra contester que le système héliocentrique ne fournisse une expression plus simple des mouvements du système solaire que le système géocentrique ? On pourrait cependant objecter que la simplicité dont nous nous targuons n'est qu'une illusion, dissipée par une étude précise des faits, les lois de Képler étant de simples approximations. Nous verrons, à propos de la dynamique, que ces divergences entre les faits et les formules simples qui étaient censées les exprimer ne sont que la conséquence

1. *Introduction à l'étude des théories de la mécanique*, p. 94.

Digitized by Google

d'une simplicité d'ordre supérieur, en sorte que, si elles constituent bien un motif pour se montrer très réservé dans l'application du principe de simplicité, elles sont bien loin d'en infirmer la valeur.

Nous ne concevons guère, d'ailleurs, comment on peut méconnaître la haute portée philosophique de ce fait qu'il est possible de reconnaître un ordre approximatif dans un ensemble fort complexe. Si cet ensemble n'était que l'œuvre du hasard, il devrait être impossible d'y découvrir de l'intelligibilité ; quant aux obscurités qui subsistent, elles ne s'expliquent que trop par l'imperfection de notre science. M. Bouasse reconnaît que le principe de simplicité a été, dans la pratique, d'une fécondité admirable, *tant qu'il s'est agi de déblayer le terrain de la science.* Si nous traduisons ces dernières expressions par : *tant qu'il s'est agi de reconnaître les lois les plus fondamentales*, nous comprendrons fort bien comment cette fécondité a dû s'atténuer grandement, lorsqu'on a cherché des lois plus spéciales, dont les effets, se perdant dans l'ensemble, n'impriment plus à l'univers cette simplicité approximative qu'il doit aux principes fondamentaux. Pour être dès lors d'une utilité moins immédiate, à titre de principe directeur des hypothèses et non de méthode de démonstration, bien entendu, il n'en conserve pas moins sa haute portée philosophique.

Un exemple, donné par M. Bouasse pour en faire la critique, nous paraît, au contraire, en faire bien ressortir l'intérêt. Observant que la simplicité des expressions mathématiques qui expriment une loi dépend essentiellement du choix des variables, il fait de cette remarque l'application suivante : Si Gay-Lussac avait étudié la dilatation des gaz avec un thermomètre rempli d'eau, il serait arrivé à une formule très compliquée. « C'est, dit-il, une chance heureuse pour Gay-Lussac que le mercure se dilate à peu près comme les gaz ; et, s'il a découvert la loi qui porte son nom,

Digitized by Google

ce n'est pas le moins du monde, comme il le croyait, parce que les lois de la nature sont simples, mais parce que le hasard avait voulu qu'on remplît les thermomètres avec du mercure. »

N'en déplaise à M. Bouasse, si Gay-Lussac n'avait pas eu cette heureuse chance, il n'aurait dépendu que de lui de corriger une pratique vicieuse et de marcher systématiquement à la découverte de ses lois : pour cela, il n'aurait eu qu'à faire la critique des divers thermomètres, comme l'ont faite Dulong et Petit.

Étant donnés divers thermomètres composés de substances différentes et gradués séparément par la division en parties égales de l'espace compris entre les deux points fixes communs, un désaccord caractérisé s'observe pour les températures intermédiaires. D'où l'on est en droit de conclure que l'adoption de l'un quelconque de ces thermomètres, pour définir des intervalles égaux de température, est absolument arbitraire; et, de même que, si l'on prend au hasard le mouvement-unité destiné à mesurer le temps, on ne peut espérer arriver à une expression simple des mouvements, de même ici la science de la chaleur devra presque forcément rester plongée dans la confusion. Il faut donc trouver d'abord une grandeur susceptible d'une mesure naturelle, non de pure convention; cette grandeur, c'est la quantité de chaleur. Quelle que soit la nature de celle-ci, quelle que soit la réalité qui se cache sous cette expression de quantité de chaleur, il est certain, par exemple, que la combustion de 2 grammes de carbone en développe deux fois ce que produit la combustion d'un seul gramme dans les mêmes conditions. En possession de cette grandeur naturelle, on peut reprendre l'examen des thermomètres et chercher si quelque substance ne subirait pas des dilatations égales par l'absorption successive de quantités égales de chaleur; or, c'est précisément une propriété que présente

Digitized by Google

très sensiblement le mercure, du moins entre 0 et 100°. Gay-Lussac aurait donc pu fort bien substituer le thermomètre à mercure à tel autre qui eût été en usage; mais il eût encore mieux fait de reconnaître que les gaz eux-mêmes jouissent mieux que le mercure de la propriété que nous venons de mettre en évidence, et d'adopter par suite le thermomètre à air.

La digression a, sans doute, été un peu longue ; mais il nous a paru intéressant de montrer, sur un exemple choisi par un adversaire de l'idée de simplicité des lois de la nature, comment on peut arriver à dégager plus ou moins complètement cette simplicité, par l'adoption de variables rationnelles.

D'autre part, il serait peu logique de prétendre que l'habileté du savant fait seule la simplicité de la formule : la loi naturelle est comme un cristal régulier que l'on dégage du cristal brut, non comme la statue qu'on tire d'un bloc de marbre. Chaque loi a, d'ailleurs, sa forme la plus simple répondant à certaines variables, et cette forme est elle-même d'une plus ou moins grande complexité ; le fait qu'on arrive à une formule vraiment simple a, notons-le, une réelle portée, car, si l'on n'avait que des formules très complexes, on pourrait croire, étant donné d'ailleurs leur caractère approximatif, qu'il n'existe, en réalité, aucune loi.

Ici, nous devons mentionner une objection que nous a opposée M. Calinon : la simplicité des formules ne dépend pas seulement du choix des variables, mais aussi des symboles et notations que l'on adopte. C'est ainsi que, en algèbre, par exemple, les formules qui expriment les n inconnues d'un système de n équations du premier degré sont très simples, avec la notation du déterminant, et très compliquées sans cette notation; de même, la différentielle d'ordre n d'une fonction de deux variables s'exprime rès simplement, au moyen d'un symbole reposant sur la

Digitized by Google

connaissance du développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ de la somme de deux nombres [1].

Étant donné que l'application de ce système de simplification dans les écritures peut être développée indéfiniment, au moins en théorie, car dans la pratique il surchargerait bientôt la mémoire, il semble qu'on puisse dire que toute formule, si complexe soit-elle, est susceptible d'être réduite à une expression simple.

Pour juste que soit cette ingénieuse remarque, elle ne nous paraît infirmer aucunement les réflexions précédentes. Il s'agit, en effet, ici, d'une simplification purement extérieure et d'ordre mnémotechnique, permettant de remplacer une longue écriture par une courte, qui n'en est que le signe conventionnel. C'est à peu près comme si l'on prétendait avoir rendu très simple le rapport de la circonférence au diamètre, le jour où on l'a représenté par l'unique lettre π. Ces simplications, de pure surface, peuvent avoir une grande utilité pratique ; mais elles laissent subsister toute la complexité réelle, dont on élude seulement en partie les inconvénients.

D'où nous croyons être en droit de conclure que la vieille notion de la simplicité des lois de la nature ne présente pas un caractère illusoire et vaut toujours la peine d'être discutée.

1. Cette différentielle peut s'écrire :

$$\left(\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy\right)^n,$$

étant convenu qu'on développe cette puissance suivant la formule du binôme et qu'on considère, dans ce développement, les exposants comme représentant des indices.

Digitized by Google

II

DYNAMIQUE

En employant ce mot classique de dynamique, nous semblons annoncer que la science dont nous allons parler repose sur l'introduction de la notion de *force;* mais tel n'est pas le mode d'exposition auquel nous ferons allusion, car, pour nous, la notion de force est tout à fait accessoire, et ne saurait être placée logiquement à la base d'une science. Une notion nouvelle va apparaître, et notre rôle va se borner à montrer comment elle se dégage de l'expression mathématique des phénomènes de mouvement. A propos de la cinématique, nous avons vu comment s'établit cette expression, au moyen d'un système de coordonnées et d'un mouvement-unité servant à mesurer le temps; nous avons vu aussi que le choix de ce système et de ce mouvement n'est point indifférent, mais que, convenablement fait, il permet d'obtenir des formules beaucoup plus simples. Sans rien préjuger des conséquences de ce choix, nous nous y attacherons provisoirement, vu qu'il est toujours plus facile de travailler sur des expressions moins compliquées.

Si l'on étudie ainsi les mouvements des corps, en ne considérant plus chaque mouvement en lui-même, mais en cherchant à démêler l'influence mutuelle des divers corps sur leurs mouvements respectifs, on arrive à formuler la loi suivante : « Si des corps quelconques A, B, C... sont mis successivement deux à deux en relation, soit par le choc, soit dans les autres circonstances où le mouvement se produit, telles que l'électrisation, l'effort musculaire, la détente d'un ressort faisant partie de l'un d'eux, etc., les vitesses qu'ils se communiquent mutuellement sont dans des rapports marqués par des nombres constants affectés à chacun

Digitized by Google

d'eux... Chaque corps, chaque point matériel a ainsi, au point de vue du mouvement, une sorte d'*équivalent mécanique*, coefficient numérique, inversement proportionnel à la vitesse qui lui est imprimée dans des circonstances données. Ce coefficient, parfaitement déterminé pour chaque corps, lorsque l'on a choisi pour unité celui qui s'applique à un corps donné, porte le nom de *masse* du corps ou du point matériel [1]. » Telle est la notion nouvelle qui donne naissance à la dynamique, en la différentiant de la cinématique.

Ceci posé, nous emprunterons encore à M. Flamant l'énoncé de la loi générale au moyen de laquelle s'expliquent tous les phénomènes de la production du mouvement :

« Les corps se meuvent comme des systèmes de points ayant, à chaque instant, des accélérations réciproques, c'est-à-dire dont les composantes, suivant leurs lignes de jonction deux à deux, sont constamment égales et directement opposées pour les deux points dont chaque ligne mesure la distance, ces accélérations étant variables avec les grandeurs de ces lignes, mais indépendantes des vitesses des divers points, et les nombres de points de chaque système étant proportionnels aux masses des corps qui leur sont assimilés [2]».

Cet énoncé paraîtra peut-être un peu touffu; aussi en allons-nous extraire l'énoncé de la loi spéciale dite de l'égalité de l'action et de la réaction, en y introduisant la notion de points de masses inégales. Comme le dit M. Calinon, cette loi comprend deux propositions :

1° Deux points quelconques échangent des accélérations dirigées en sens inverse suivant la droite qui les joint;

2° Ces accélérations sont entre elles dans le rapport inverse des masses des deux points.

1. Flamant, *Mécanique générale*, p. 312 et 313.
2 P. 314.

Digitized by Google

Pour faire la critique de ces deux propositions, nous n'avons qu'à résumer le travail de notre ami, qui, croyons-nous, a été le premier à faire cette critique et l'a faite de main de maître. La première proposition nous met en présence de quantités appartenant toutes à la cinématique, puisque la masse en est absente ; mais elle n'en constitue pas moins un principe de dynamique, parce qu'elle étudie les mouvements de deux points comme influencés l'un par l'autre, non par suite d'une *liaison* comme on en imagine en cinématique, mais par une loi intime que révèle l'expérience. Or, cette loi, exprimant une propriété des directions des accélérations, ressentira le contre-coup de tout ce qui influe sur ces directions. Mais nous avons vu (p. 70) que le changement du système d'axes modifie ces directions, à moins que le nouveau système ne soit animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport au premier. D'où l'on doit conclure que la première partie de la loi de l'égalité de l'action et de la réaction est essentiellement subordonnée au choix des axes. La même conclusion s'impose à l'égard du choix du mouvement-unité, dont dépend également la direction des accélérations (voir p. 69).

La seconde partie de la loi, d'après laquelle les accélérations échangées sont inversement proportionnelles aux masses, s'effondrera en même temps que la première ; mais il faut bien remarquer que l'expression, beaucoup plus complexe, qui se substituera à la relation exprimant cette inverse proportionnalité continuera à contenir les masses des points, avec leurs mêmes valeurs. Il en résulte que cet *équivalent mécanique* de chaque point matériel, dont parlait M. Flamant, a une portée, une valeur générale indépendante du choix des axes et du mouvement-unité. En attribuant ainsi à chaque point un coefficient caractéristique, on crée toute une série de théories, applications apodictiques de la géométrie, comme l'était déjà la cinématique

Digitized by Google

pure : il suffit de mentionner à ce sujet les théories des centres de gravité, des moments d'inertie et des puissances des points.

Ces théories établies, rien n'empêche d'étudier d'une manière entièrement mathématique les mouvements qui vérifient la loi de l'égalité de l'action et de la réaction, absolument comme en cinématique pure on étudiait également *a priori* des mouvements particuliers, tels que ceux qui sont uniformément variés. On pourrait donc dire que la dynamique, caractérisée par l'introduction de la masse, a un caractère aussi apodictique que la cinématique, si l'attribution d'un coefficient constant à chaque point ne devait pas être légitimée expérimentalement. La justification de cette attribution apparaît comme absolue, en ce sens qu'elle ne dépend aucunement du choix des axes et du mouvement-unité servant à la mesure du temps. C'est donc une loi essentielle du monde matériel, bien différente en cela de la loi de l'égalité de l'action et de la réaction, complètement subordonnée à ce double choix. On voit donc quel intérêt il y a à ne pas mêler confusément, comme on le fait dans tous les traités, des propositions de portées si différentes [1].

L'importance du choix des axes et du mouvement-unité se trouve singulièrement accrue par le succès remporté au point de vue dynamique. Non seulement il apparaît comme la condition nécessaire d'un principe qui semble à beaucoup comme la base de la science de l'enchaînement des mouvements ; mais, en permettant de reconnaître la loi des échanges d'accélération entre les astres, il fait voir que, si la description cinématique ne conduisait qu'à une simplicité approximative, cela tenait à ce que les divers astres du système solaire réagissent tous mutuellement les uns sur les

1. Si nous avions, selon les vieux usages, parlé des forces au lieu des accélérations, rien n'eût été changé, puisque les forces sont précisément égales au produit des masses par les accélérations et ont les directions de ces dernières.

Digitized by Google

autres : l'action dominante du soleil imprime à l'ensemble un caractère d'unité, mais les actions secondaires des autres astres altèrent cette simplicité, qui réapparaît pleine et entière dans la loi unique régissant toutes ces actions mutuelles. Ainsi Képler a formulé ses lois sans trop se préoccuper des petits écarts ; Newton a déduit de ces lois cinématiques approchées une loi dynamique ; puis, Le Verrier a confirmé la rigueur de cette loi en montrant, de la façon que l'on sait, qu'elle explique admirablement les dérogations aux lois de Képler. Si les savants d'autrefois avaient professé le superbe dédain qu'on oppose aujourd'hui à l'idée de la simplicité des lois de la nature, Képler se serait perdu dans des déterminations précises et incohérentes, d'où aucune loi n'aurait pu être extraite. En cherchant le simple, il a mis en évidence l'action prépondérante du soleil, et la loi de cette action, une fois découverte, s'est trouvée universellement applicable.

Quoi qu'il en soit, le choix des axes et du mouvement-unité fait d'après le seul examen cinématique de l'univers se trouve confirmé de la façon la plus éclatante ; mais le caractère logique de ce choix n'a pas changé, et les considérations au moyen desquelles nous avons, croyons-nous, montré que son succès ne saurait être invoqué en faveur de la réalité d'un mouvement absolu et d'un temps absolu, conservent toute leur valeur [1].

En ce qui concerne spécialement le temps, on est généralement porté à croire qu'on peut donner des temps égaux

1. A l'appui du mouvement absolu, M. Boussinesq invoque le fait que l'indépendance des accélérations par rapport aux vitesses est liée au choix des axes (*Etude sur divers points de la philosophie des sciences*), et, d'autre part, M. Vicaire a plaidé avec science la thèse du mouvement absolu, en s'appuyant sur divers phénomènes dynamiques (*Annales de la Société scientifique de*

Digitized by Google

une définition véritable, atteignant une réelle égalité naturelle. Mais M. Delbœuf a présenté une critique décisive du cercle qu'implique une telle croyance : « Qu'est-ce que l'unité de temps, dit-il ? Elle est arbitraire, dit Laplace ; on prend par exemple la seconde. Mais toutes les secondes sont-elles de même valeur ? Pour vérifier un mouvement uniforme, il me faut d'abord une division uniforme du temps. Mais, quel que soit le moyen par lequel je crois obtenir cette division uniforme, sa construction se fonde nécessairement sur les lois de la mécanique, et admettre ses indications comme sûres, c'est admettre implicitement comme vraies ces mêmes lois qu'il s'agit pourtant de vérifier. Si, par exemple, je divise le temps par le mouvement oscillatoire du pendule, d'où sais-je que les oscillations du pendule sont isochrones ? par les lois de la mécanique. Donc partir de l'isochronisme des oscillations du pendule pour vérifier les lois de la mécanique, c'est faire une pétition de principe. Bien mieux, admettons, même hypothétiquement, la vérité des lois mécaniques ; il faut encore, pour que les oscillations soient isochrones, que la masse et la vitesse de rotation de la terre restent constantes. Il faudrait même que, pendant l'expérience, la terre, le soleil, la lune et tous les corps célestes restassent immobiles, car la pesanteur à la surface de la terre dépend de tout l'ensemble du système céleste... Nous pouvons dire après cela, croyons-nous, que la constatation du mouvement uniforme est impossible[1]. »

Cette critique est irréfutable, et cependant les partisans

Bruxelles, année 1893-94, 2e part., p. 283); mais leur argumentation tombe complètement sous le coup de celle que nous avons présentée p. 73 et que nous allons répéter.

1. *Essai de logique scientifique*, p. 256. M. Delbœuf ajoute que le même cercle vicieux se retrouve dans la définition de la masse. La critique est sans doute exacte, appliquée aux définitions usuelles, mais non appliquée à la définition que nous en avons

Digitized by Google

du temps absolu peuvent y échapper par une modification convenable de leur thèse. Sans doute, peuvent-ils répondre, nous ne saurions affirmer *a priori* que toutes les conditions du mouvement soient les mêmes lors des oscillations successives d'un pendule ; mais, comme nous n'apercevons aucune différence qui semble devoir exercer une influence appréciable, nous posons l'hypothèse de l'identité des diverses oscillations et, comme conséquence, l'égalité des temps durant lesquels elles se produisent. Cette hypothèse, l'expérience la confirme, non seulement par la fécondité de ses conséquences, fécondité que l'étude qui précède a mise au jour, mais aussi par l'accord des divers modes de mesure du temps fondés ainsi sur l'hypothèse de mouvements ou uniformes ou périodiquement variés, tous ces modes étant d'accord pour désigner les mêmes intervalles de temps comme égaux.

Une telle réponse a, selon nous, une valeur très réelle et ne permet pas d'écarter les définitions courantes des temps égaux avec autant de dédain que le font MM. Delbœuf et Calinon ; mais nous l'avons déjà réduite à sa vraie portée. Sans doute, si l'on admet *a priori* l'existence de temps égaux, on est en droit de soutenir qu'on les a mis en évidence ; mais, par contre, si nous nions cette existence, les succès si caractéristiques dont se prévalent nos contradicteurs n'ont

donnée, après M. Calinon, puisqu'elle est indépendante du choix des axes et du mouvement-unité.

M. Goedseels a formulé avec une grande précision l'argument de M. Delbœuf reproduit ci-dessus : « Comme nous ne connaissons les causes que par leurs effets, a-t-il dit, et les effets que par les mesures de leurs éléments constitutifs, notamment le temps mis par leurs éléments à s'accomplir, il nous est impossible de constater l'identité de deux phénomènes sans mesurer leurs durées. Il en résulte que la définition de l'égalité des durées par celle des phénomènes présente un cercle vicieux » (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, année 1893-94, 1re part., p. 8).

Digitized by Google

rien qui puisse nous émouvoir. Il a été démontré, en effet, que les lois qui président à la production et à l'enchaînement des mouvements sont *nécessairement* liées au choix du mouvement-unité. Pour arriver à faire ce choix vraiment privilégié, qui seul peut faire régner l'ordre au sein des mouvements si complexes de la matière, la première chose à faire était d'essayer des mouvements qui présentassent des caractères d'harmonie, tant pour nos sens que pour notre raison : le succès obtenu s'interprète également dans l'une et l'autre hypothèse [1].

Le présent chapitre peut donc se résumer ainsi : la recherche de lois simples exprimant l'enchaînement des phénomènes de la nature conduit à rapporter tous les mouvements à un système d'axes défini, à une translation uniforme près, et à mesurer les temps au moyen d'un mouvement-unité strictement déterminé. Les partisans du mouvement et du temps absolus peuvent voir un succès dans ce résultat ; mais les adversaires des mêmes conceptions sont fondés à soutenir que la relativité du mouvement et du temps n'en subit aucune atteinte.

Dans tout ce qui précède, nous avons admis, pour ainsi dire d'une façon absolue, que le mouvement diurne de la terre fournit exactement la mesure du temps qui correspond aux lois dynamiques simples ; or, il est fort probable que la rotation de la terre éprouve, par rapport au mouve-

1. M. Sorel a essayé de montrer que, grâce à la thermodynamique, on peut « concevoir un étalon de temps rigoureusement invariable » (*Deux nouveaux sophismes sur le temps*, dans les *Annales de philosophie chrétienne* de décembre 1892, p. 252). Mais, comme il le dit lui-même, son raisonnement n'a de valeur que si on admet la réalité physique de l'énergie ; or, le temps figurant explicitement dans l'expression de l'énergie, il est bien clair que celle-ci ne peut être constante qu'avec un choix convenable du mouvement type ; l'argument est donc sans portée philosophique.

Digitized by Google

ment-unité théorique, un certain ralentissement par suite du frottement des eaux de la mer et peut-être du noyau liquide central. Il est donc intéressant d'indiquer comment peuvent se définir et se déterminer les axes et le mouvement-unité théoriques; c'est ce qu'a fait M. Goedseels avec une grande précision. On admet qu'il existe au moins une manière de mesurer le temps et un système d'axes tels que les corps de l'univers se meuvent conformément à la loi de la gravitation universelle, à la loi de l'égalité entre l'action et la réaction et à la loi de l'indépendance des forces. Partant de là, on détermine comment les astres doivent se mouvoir par rapport au système d'axes, et l'on rencontre dans ces calculs des constantes et une variable indépendante t. Si n est le nombre des constantes, on fait $n + m$ observations à m époques différentes, et l'on obtient ainsi $n + m$ équations entre les n constantes et les m valeurs de t.

Si ces équations sont incompatibles ou ne fournissent pas, pour t, m valeurs croissant avec l'ordre des observations, les hypothèses faites sont absurdes; si elles fournissent, au contraire, des valeurs convenables pour les inconnues, il est possible que les hypothèses répondent à la réalité, mais il faut encore qu'on puisse faire croître t de manière à faire concorder à chaque instant l'univers calculé avec l'univers réel.

Tous ces calculs sont faits à l'avance par les bureaux des longitudes et consignés dans les éphémérides; jusqu'à présent on a pu réussir à maintenir l'accord entre la théorie et l'observation, grâce aux corrections de réfraction, d'aberration, etc., et cela avec une mesure du temps différant extrêmement peu de celle qui résulte de la révolution d'une étoile quelconque. La mesure théorique du temps est donc celle que donnent les éphémérides calculées en se basant sur l'hypothèse de la gravitation universelle [1].

1. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, année 1893-94, 1re part., p. 9 et 10.

Digitized by Google

CHAPITRE III

LA GÉOMÉTRIE DE NOTRE UNIVERS

Nous avons vu que, si l'on se place à un point de vue purement rationnel, toutes les géométries pouvant être construites sans entraîner de contradiction ont une égale valeur, sont aussi vraies les unes que les autres. Mais on peut se demander à laquelle d'entre elles est conforme notre univers. Pour beaucoup, la réponse à cette question n'est pas douteuse : notre univers est euclidien. A cette affirmation sans réserve, il est d'abord indispensable d'opposer une restriction à laquelle ne saurait contredire aucune personne nous ayant suivi jusqu'ici : du moment que le système de géométrie cherché ne présente aucun caractère de nécessité, nous ne pouvons le connaître que par la méthode d'observation ; c'est uniquement par des mesures que nous arriverons à déterminer le paramètre de notre univers, à supposer même que notre espace soit identique à lui-même, ce que rien n'impose *a priori*. Dès lors, cette détermination ne pourra être faite qu'à un certain degré d'approximation, comme toutes les déterminations expérimentales.

Mais nous allons nous trouver en présence de très subtils arguments tendant à montrer que c'est une illusion de

Digitized by Google

chercher dans les mesures une indication quelconque sur la nature de notre espace, en sorte que nos sensations ne seraient plus des « signes à interpréter », comme l'avait dit Helmholtz, attendu qu'on pourrait procéder à cette interprétation d'une façon absolument quelconque, sans que rien permît de motiver aucune préférence, au point de vue de la réalité objective. Tel est le sens qu'il faut attribuer à ces paroles de M. Poincaré : « Que doit-on penser de cette question : La géométrie euclidienne est-elle vraie ? — Elle n'a aucun sens. — Autant demander si le système métrique est vrai, et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies, et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être *plus commode* [1]. »

Nous étudierons plus loin cette thèse absolue; mais nous en examinerons d'abord une moins radicale, soutenue par M. Calinon dans un article de la *Revue philosophique* [2]. Il admet la valeur des mesures que nous prenons sur la terre et ayant pour objet soit la distance de deux points situés à sa surface, soit l'angle de deux lignes qui y sont tracées ou de deux rayons lumineux venant s'y rencontrer, tandis qu'il fait justement remarquer que la détermination des dimensions et des distances des corps célestes repose sur l'hypothèse que les rayons lumineux ont la forme de droites euclidiennes [1]. Voyons ce qu'il lui paraît possible de conclure des données expérimentales dont nous disposons.

1. *Revue des sciences pures et appliquées* du 15 décembre 1891, p. 773 et 774.

2. *L'indétermination géométrique de l'univers*, dans la *Revue* de décembre 1893.

3. M. Calinon oppose ainsi les mesures tactiles aux mesures visuelles; si, en réalité, la vue joue un rôle important dans les premières, il n'en est pas moins vrai que le toucher peut y contrôler les indications de la vue.

Digitized by Google

Les objets situés à la surface de la terre et cette surface elle-même nous apparaissent comme conformes à la géométrie euclidienne, dans la mesure de précision avec laquelle nous pouvons déterminer les longueurs et les angles. Comme cette précision ne saurait être absolue, nous devons en conclure seulement que le diamètre de la terre a une valeur négligeable par rapport au paramètre ou au rayon de courbure de notre espace, si celui-ci est identique à lui-même, ou aux rayons de courbure dudit espace, dans la région que nous occupons, s'il n'est pas identique.

En ce qui concerce les astres, que nous ne connaissons que par l'intermédiaire de rayons lumineux, nous pouvons seulement déterminer les directions de ceux-ci à leur arrivée dans notre œil[1] ; quant à la trajectoire de la lumière, M. Calinon l'astreint seulement à être déterminée par deux points. Mais cela ne veut pas dire que les rayons lumineux soient des géodésiques de notre espace, car il peut y avoir plusieurs lignes de même forme passant par les deux points, bien qu'une seule d'entre elles soit déterminée par les équations générales lorsque les deux points sont donnés[2]. Ajoutant à cela que la figure de la terre est « une figure infiniment petite », M. Calinon en conclut que la géométrie de l'univers est indéterminée et que, même en géométrie

1. Nous modifions un peu la rédaction de M. Calinon, qui, selon nous, emploie certaines expressions peu rigoureuses, au sujet desquelles nous aurons à faire quelques réserves.

2. Comme exemple, M. Calinon prend, dans un plan euclidien, en adoptant les coordonnées cartésiennes, les courbes dont l'équation générale est : $uf_1(x, y) + vf_2(x, y) = f_3(x, y)$, f_1, f_2, f_3, étant trois fonctions fixes des coordonnées, et u et v deux paramètres variables ; si on astreint cette courbe à passer par deux points u et v sont déterminés par deux équations du premier degré, en sorte qu'on obtient une courbe unique, sauf dans des cas particuliers qu'on peut éviter par un choix convenable de la forme des fonctions.

Digitized by Google

euclidienne, on peut adopter une infinité de solutions où le réseau des rayons lumineux est composé de courbes.

Cette expression de « figure infiniment petite », qui n'est pas mathématiquement exacte, puisqu'il s'agit de figures déterminées, le devient pratiquement si l'on veut dire par là que ses dimensions sont trop petites pour que les déplacements à sa surface produisent aucune modification appréciable dans la direction des rayons lumineux. Toutes les fois qu'il en est ainsi, c'est-à-dire pour les étoiles fixes (sauf pour quelques-unes à l'égard desquelles un artifice permet, nous le verrons, d'éluder la difficulté), il est incontestable que nous pouvons construire à notre gré les rayons lumineux, puisque nous n'en connaissons qu'un point et la tangente en ce point, sans que rien puisse nous apprendre à en connaître un autre point. Mais l'univers comprend, outre les étoiles fixes, les astres qui composent le système solaire et pour lesquelles l'hypothèse précédente n'est pas vérifiée.

Si, en effet, on vise un même astre du système solaire de deux points suffisamment éloignés, les deux rayons lumineux n'ont pas la même direction. D'une façon absolue, on pourrait leur attribuer deux tracés concourants quelconques ; mais, comme on peut multiplier les points d'observation, on devra imposer à tous les rayons de converger vers un même point, variable sans doute avec le système géométrique adopté, mais unique dans chaque système. Or, cette condition ne saurait être vérifiée en général : il est aisé de s'assurer que, si elle l'est dans l'hypothèse de droites euclidiennes, elle ne l'est pas dans celle de droites de Lobatschewski ou de Riemann. M. Calinon, sans sortir de l'espace euclidien, présente bien un système de transformation point par point conservant les angles et où des courbes se substituent aux rayons lumineux rectilignes ; mais, dans ce système, il nous le dit lui-même, les points correspondant à ceux qui sont à la surface de la terre ne diffèrent des

Digitized by Google

points primitifs qu'à des infiniment petits du second ordre près, attendu que cet astre est infiniment petit lui-même. Or, c'est là une énonciation qu'on ne saurait accepter quand on fait intervenir les autres astres du système solaire, les dimensions de notre planète n'étant point alors sans influence appréciable sur les observations.

Nous devons reconnaître toutefois qu'il existe une très réelle indétermination : au système de droites euclidiennes figurant les rayons lumineux, on peut substituer, en effet, une infinité de systèmes isométriques, où angles et longueurs sont les mêmes, et entre lesquels les observations optiques ne permettent de faire aucun choix, car, de même que, à rester enfermé sur un cylindre parabolique, il est impossible de le distinguer d'un plan, de même un espace à trois dimensions, isométrique de l'espace euclidien, lui est absolument identique pour qui reste enfermé dans cet espace. On se trouve donc en présence d'une indétermination rigoureusement irréductible qui subsisterait alors même qu'on pourrait suivre les rayons lumineux, et mesurer leurs longueurs et leurs angles en tous points. Après avoir constaté cette indétermination nous n'en parlerons plus, et nous nous bornerons à discuter celles qu'on prétend y ajouter.

Nous avons vu tout à l'heure que les dimensions de la terre sont assez grandes pour que les observations des directions des rayons lumineux provenant des astres du système solaire permettent de considérer l'hypothèse des droites euclidiennes comme plus vraisemblable que celles qui en diffèrent d'une façon pratiquement appréciable. Le même système, en passant du point de vue cinématique au point de vue dynamique, conduit une seconde fois à la même conclusion. Parlant de la loi de la gravitation, M. Calinon déclare qu'on pourrait l'exprimer, comme toute autre loi physique, au moyen d'une autre représentation géométrique de l'univers, et, s'il se bornait à cela, son assertion serait

Digitized by Google

incontestable ; mais il ajoute que le choix du système euclidien se justifie seulement par des raisons de simplicité et de commodité, *de même que, dans l'étude analytique d'une courbe, on adopte telles coordonnées parce que cela conduit à des calculs plus courts et à des formules plus élégantes.*

Ceci est encore vrai, sans doute, mais cache un fait très important. D'où vient qu'une loi aussi simple que celle de Newton dans le système où les rayons lumineux sont représentés par des droites euclidiennes prend une forme extrêmement complexe dans un autre système? Il y a une première raison, d'ordre purement mathématique, tenant à ce que les formules de la géométrie des droites d'Euclide sont les plus simples entre celles de toutes les géométries possibles ; mais cette raison ne suffit pas et ne saurait empêcher qu'une loi pût avoir une expression plus simple dans une géométrie non euclidienne. Qu'on suppose, en effet (et rien n'empêche de le faire), que la loi de Newton réponde à un système non euclidien et qu'on cherche sa traduction dans le système où les rayons lumineux sont représentés par des droites euclidiennes : on arrivera à une expression beaucoup plus complexe, ce qui montre bien que la simplicité des lois n'est pas liée forcément à celle des systèmes géométriques. Il faut donc reconnaître qu'il existe une *harmonie* entre les réalités physiques et un système spécial de représentation.

M. Calinon n'a pas été convaincu par ces considérations que nous lui avons soumises et a essayé de nous démontrer que l'adoption de la géométrie euclidienne réalise forcément la double simplification dont nous parlons, ou plutôt qu'il n'y en a qu'une. Mais sa démonstration ne s'applique qu'au cas où les distances entre les masses matérielles considérées sont « infiniment petites » par rapport au paramètre de l'espace. Or, dans ce cas, il est incontestable que la simplification d'ordre purement mathématique est seule

Digitized by Google

possible, et que, par suite, le système euclidien doit donner forcément les formules les plus simples. Dire, en effet, que les distances sont infiniment petites par rapport au paramètre, c'est dire que la précision des mesures ne saurait permettre de distinguer cet espace de l'espace euclidien, bien qu'on admette en principe la possibilité de cette distinction ; alors l'harmonie dont nous parlions existe avec un espace faisant partie d'un groupe dont les limites dépendent de la précision des mesures, mais qui comprend, par hypothèse, l'espace euclidien. Pratiquement, cette harmonie existe pour tous ces espaces expérimentalement indistincts, et, par suite, il n'y a plus que des propriétés d'ordre purement mathématique qui puissent rendre plus simple l'expression des phénomènes dans l'un de ces espaces ; on peut donc prévoir que l'espace euclidien répondra forcément à cette condition [1].

Nous arrivons donc par une double voie, par l'étude purement géométrique et par l'étude dynamique des phénomènes naturels, à cette conclusion que, dans l'étendue du système solaire, les rayons lumineux ont, sous réserve des systèmes isométriques, la forme de droites euclidiennes, c'est-à-dire que le paramètre de l'espace auquel appartiennent ces droites est, pour nos instruments, infiniment grand par rapport aux distances du soleil et des planètes.

Si nous considérons maintenant les étoiles, notre base de mesure n'est plus la surface de la terre, mais l'orbite qu'elle décrit autour du soleil, puisque nous avons vu que

1. Nous pourrions citer, à l'appui de notre thèse, la conclusion même de l'article de M. Calinon : « Sachons, dit-il, que, dans le domaine des faits physiques et astronomiques actuellement observés, cette géométrie particulière a l'avantage d'une grande simplicité ; mais sachons aussi que nous avons le droit de chercher dans d'autres géométries la loi qui exprimerait, par exemple, de la façon la plus simple, les attractions à grandes distances, entre le soleil et les étoiles fixes. »

Digitized by Google

nous sommes en droit de considérer comme conformes à la réalité les résultats du calcul euclidien, en ce qui concerne le système solaire. Mais, pour la presque totalité des étoiles, cet agrandissement de la base est sans utilité, puisqu'il n'en existe qu'un très petit nombre qui ait une parallaxe annuelle mesurable ; pour toutes celles-là, dès lors, on se trouve exactement dans le cas étudié par M. Calinon, et il est évident, du reste, que nous ne disposons, pour chacune d'elles, que de la direction constante de la tangente aux rayons lumineux en leurs points d'arrivée sur la terre : cela ne permet aucune conclusion sur la forme de ces rayons, qu'il y a seulement lieu d'admettre assimilables à des droites euclidiennes sur une longueur égale à la distance de l'étoile la plus éloignée qui ait une parallaxe annuelle. Pour les quelques étoiles, en effet, qui ont une parallaxe appréciable, on peut reproduire l'argumentation que nous avons formulée au sujet du système solaire ; on doit, toutefois, remarquer que, vu la petitesse des angles en jeu, tous inférieurs à une seconde, le point de concours des rayons lumineux se trouve déterminé d'une façon peu précise.

Il en résulte que la vérification de l'hypothèse d'après laquelle les rayons lumineux ont la forme de droites euclidiennes ne saurait être faite qu'avec une approximation assez grossière ; mais c'est là un point secondaire, qui n'empêche pas de dire, en principe, que cette vérification s'étend jusqu'aux distances des étoiles les plus voisines de la terre.

Remarquons que ce doute, toujours posé sur les résultats que fournirait une observation appliquée à de plus grandes distances, est justifié, non seulement par l'absence même d'observations, mais aussi par ce fait que moins une figure géométrique d'un espace quelconque est grande, et moins elle diffère d'une figure euclidienne, si bien que toute

Digitized by Google

figure infiniment petite est euclidienne (p. 32). Mais on a parfois tendance à abuser de ce théorème et à dire que, du moment où une figure est infiniment petite par rapport à l'espace qui la contient, elle est forcément euclidienne. Une telle proposition, pour être appréciée, exige une distinction entre les espaces finis et les espaces infinis. Pour les premiers, il y a un rapport entre le paramètre et l'étendue même de l'espace, en sorte qu'une figure extrêmement petite par rapport à cette dernière l'est aussi par rapport au paramètre, et diffère, par suite, fort peu d'une figure euclidienne. Mais il n'en est pas de même dans les espaces infinis, puisqu'alors il n'existe aucune relation entre l'étendue d'un espace et son paramètre. On remarquera que, s'il en était autrement, tous les espaces infinis seraient euclidiens, puisque toute figure déterminée est infiniment petite par rapport à une étendue infinie. On voit par là combien il serait incorrect de dire que, la terre et même le système solaire étant extrêmement petits par rapport au reste de l'univers, la géométrie des figures enfermées dans ces limites doit forcément être sensiblement euclidienne ; tout ce qu'on peut dire, c'est que, si la géométrie de notre univers n'est pas euclidienne, la valeur des divergences ira en diminuant avec les dimensions de la partie considérée, et que ces divergences pourront tomber au-dessous des moyens de mesure ; mais rien ne fixe, *a priori*, les dimensions à partir desquelles ce fait se produira.

Dans tout ce qui précède, nous avons admis que l'on pouvait avoir confiance dans les mesures de longueur, autant, du moins, que le permet la précision de nos instruments estimée selon les idées ordinaires. Mais M. Poincaré [1] a fait remarquer que nos instruments de mesures pourraient fort

1. Voir notamment la *Revue des sciences pures et appliquées* du 30 janvier 1892, p. 74.

Digitized by Google

bien, quand nous nous déplaçons, varier de longueur en même temps que nous, sans que nous pussions nous en apercevoir, auquel cas nos mesures se trouveraient erronées. La considération d'un astre suffisamment voisin, visé de divers points de la terre, va nous permettre de réduire cette hypothèse à sa juste valeur.

Prenons une base d'observation et les rayons lumineux joignant ses divers points à un point extérieur ; puis, construisons une nouvelle base, où les parties égales de la première soient remplacées par leurs mesures évaluées au moyen de l'instrument variable de M. Poincaré[1] : aux points homologues des deux bases, les rayons lumineux ont mêmes directions, d'où il résulte que, si nous attribuons à la seconde série la forme de droites euclidiennes, ils ne seront pas concourants, les premiers l'étant. S'ils l'étaient, en effet, ils détermineraient sur la seconde base des segments proportionnels à ceux de la première, ce qui est contraire à l'hypothèse. Reste donc la ressource, parfaitement légitime, de modifier la forme des rayons lumineux, laquelle ne nous est pas donnée. Mais ici nous rentrons dans un cas analogue à celui de la gravitation, étudié plus haut : l'abandon des mesures résultant de l'hypothèse de constance de nos appareils nous conduit à un système très complexe, et dont la complexité est toute de fait, puisque, inversement, nous aurions pu nous donner un système simple dans le second cas, ce qui nous aurait fait remonter à un système complexe dans le premier. On est en droit d'admettre dès lors que la première hypothèse répond à la réalité, puisqu'on ne doit pas supposer que la simplicité du système auquel elle conduit soit l'effet d'un pur hasard.

1. Nous supposons ici des bases rectilignes ; dans la réalité, on a une base courbe, et dont la forme n'est déterminée qu'au moyen des mesures. Il en résulte seulement que la complication est plus grande que celle à laquelle nous allons aboutir.

Digitized by Google

Nous arrivons donc à cette conclusion d'ensemble que, sous réserve du caractère approximatif de toute mesure, l'interprétation des données géométriques dont nous disposons conduit à un résultat beaucoup plus simple si l'on admet la constance de nos appareils de mesure quand nous les déplaçons, contrairement à l'hypothèse de M. Poincaré, et si l'on attribue aux rayons lumineux la forme de droites euclidiennes. Cette simplicité n'est, d'ailleurs, point la conséquence exclusive, nous l'avons vu, en ce qui concerne la forme des rayons lumineux, de la simplicité de la droite euclidienne, mais ne s'explique que par une véritable harmonie entre l'hypothèse et la réalité. Cela ne saurait constituer une preuve véritable de la forme des rayons lumineux, car les autres hypothèses n'entraînent aucune contradiction ; mais on est bien loin d'être en présence d'un cas analogue à celui du choix d'un système de coordonnées.

Nous sommes donc en droit de dire que le système géométrique constitué par le système solaire et même les étoiles les plus proches est conforme, selon toute vraisemblance, au système euclidien [1], toujours sous les réserves du caractère approximatif des mesures et de l'indiscernabilité des espaces isométriques.

Ce dernier point vaut qu'on y insiste un peu pour en reconnaître la véritable portée. Si un espace n'est, comme nous le verrons, qu'un système de possibilités de relations, et si ces relations sont isolées, non comprises dans un ensemble plus général constituant un espace d'ordre supérieur, c'est-à-dire ayant plus de dimensions, alors les divers espaces isométriques apparaissent comme de véritables indiscernables [2]. Si donc notre univers ne fait pas partie

1. Soit qu'il fasse partie d'un espace identique à lui-même, soit qu'il constitue une portion d'un espace non identique, assez restreinte pour que la variation de la courbure y soit insensible.

2. Nous parlons, bien entendu, des seuls espaces isométriques

Digitized by Google

d'un espace à quatre dimensions, inconnu des hommes, l'hypothèse d'espaces isométriques n'a pas de raison d'être, puisque leur distinction n'a de sens que dans un espace à quatre dimensions.

Dans le même ordre d'idées, on peut se demander ce que signifierait l'hypothèse de la variabilité des appareils de mesure : si tous les corps ne varient pas également de longueur en passant d'un lieu dans un autre, on doit rechercher les motifs qui peuvent guider dans la détermination des mesures; mais, si l'on suppose que tout varie également, la relativité absolue des grandeurs permet de demander ce que signifie cette prétendue variation et d'affirmer même qu'elle est dépourvue de toute signification, en sorte que l'hypothèse de M. Poincaré s'évanouit quand on la pousse à l'extrême.

Sous une forme un peu différente et avec une note philosophique plus accentuée, qui le rattache au criticisme, M. Couturat se place très près de M. Poincaré. Pour lui [1], non seulement quel que fût l'espace, on pourrait interpréter les sensations dans le système euclidien, mais cette interprétation s'imposerait en tout cas à notre intelligence. D'abord, la possibilité du mouvement d'une figure invariable lui paraît le fondement nécessaire de la mesure et de toutes les constructions géométriques, en raison de la définition de l'égalité par la superposition, d'où résulterait que nous ne pouvons faire une mesure sans admettre le mouvement des figures invariables. Nous avons étudié cette question avec assez de détails (p. 20), pour que nous n'ayons pas ici à revenir sur les raisons qui nous empêchent d'ac-

dans lesquels les intersections des géodésiques ne sont pas multipliées.

1. Voir la *Revue de métaphysique et de morale*, 1893, p. 63 et 302.

Digitized by Google

cepter ce *principe d'identité géométrique*, ou du moins qui nous le font réduire à la possibilité de déplacer une ligne en lui conservant sa longueur : on peut avoir ainsi un *mètre* dans un espace non homogène, au sens donné à ce mot par M. Delbœuf.

Quant au choix de l'espace euclidien, de préférence à ceux de Lobatschewski et de Riemann, la constatation de l'existence des figures semblables n'y serait pour rien, et ce choix ne serait dû qu'au *principe de relativité de l'espace.* Ce principe exigerait impérieusement la possibilité de ces figures dans l'espace construit avec nos sensations, et M. Couturat croit avoir trouvé une réfutation décisive de notre conception d'une relativité d'après laquelle les figures semblables n'existeraient que dans des espaces différents. Prenant acte de ce que nous reconnaissons que ces divers espaces, pour être comparés, doivent être conçus comme inclus dans un espace à quatre dimensions, il déclare que cet espace sera nécessairement homogène, puisqu'il contient des figures semblables, à savoir les espaces non euclidiens eux-mêmes ; d'où il résulterait qu'on aurait simplement une géométrie euclidienne à quatre dimensions. Que M. Couturat, dont la science est généralement si sûre, nous permette de lui dire qu'il paraît bien être dans l'erreur. D'abord, si un espace homogène ou euclidien peut bien recevoir des espaces Riemann de l'ordre inférieur, nous avons vu qu'il serait impossible d'y insérer des espaces Lobatschewski. Nous avons vu aussi que l'absence de figures semblables dans les espaces non euclidiens n'est pas absolue : chacun sait bien, du reste, que, si la similitude n'existe pas en général sur la sphère, une infinité de cercles, tous semblables entre eux, n'y coexistent pas moins. Ce n'est donc pas dans un espace euclidien à quatre dimensions que l'on doit, en général, étudier les divers espaces à trois dimensions, mais dans un espace à plus petite courbure

Digitized by Google

que tous ceux qu'on doit y introduire, l'expression « plus petite » étant prise dans son sens algébrique.

Nous échappons donc au dilemme où prétendait nous enfermer M. Couturat : « Ou bien, disait-il, on ne considère qu'un seul espace non homogène, et alors la loi de la relativité des grandeurs n'est pas satisfaite ; ou bien on considère plusieurs espaces non homogènes d'ordre supérieur, et alors c'est celui-ci seulement qui vérifie le principe de relativité. »

Nous échappons à ce dilemme en rectifiant l'erreur mathématique sur laquelle il paraît reposer ; mais, en outre, nous ne voyons pas pourquoi nous n'aurions pas pu construire, si nos sensations nous y avaient induits, une géométrie non euclidienne à trois dimensions, sauf à satisfaire au principe de relativité par la conception d'un espace euclidien à quatre dimensions, si cela avait été nécessaire.

En parlant ainsi de l'influence de nos sensations sur nos conceptions, nous ne croyons pas tomber dans l'empirisme, comme nous en sommes accusé, car cela ne signifie point que nous tirions la géométrie de ces sensations, mais seulement qu'elles nous suggèrent certaines notions de préférence à d'autres, parmi toutes celles que permet la raison. L'identité approximative des sensations évoque, en effet, des idées identiques, et des sensations différentes des idées différentes, tant qu'un motif ne nous apparaît pas de refréner ce penchant naturel qui dérive, au fond, du principe de raison suffisante.

On trouvera peut-être que nous nous sommes écarté de la question de la géométrie de notre univers ; mais nous n'avons fait que la traiter sous sa forme idéaliste, celle des rapports entre la géométrie et les sensations spatiales. Sous cette forme, nous ne pouvons que conclure à ce que la géométrie euclidienne est la construction la plus naturellement suggérée à la pensée, par les sensations, comme, sous la forme réaliste, nous avions admis qu'elle constitue l'interprétation la plus directe de nos perceptions approximatives.

Digitized by Google

CHAPITRE IV

LES PROBLÈMES DES MONDES SEMBLABLES ET DE LA RÉVERSIBILITÉ DE L'UNIVERS

Après avoir étudié dans toute leur généralité les questions de l'espace et du temps, au point de vue de la géométrie et de la mécanique, il nous paraît y avoir un intérêt sérieux à examiner l'application à quelques questions spéciales des principes ainsi établis. Telle est la raison d'être de ce chapitre, consacré au double problème des mondes semblables et de la réversibilité de l'univers matériel.

I

LE PROBLÈME DES MONDES SEMBLABLES

Imaginons que toutes les dimensions et distances des parties de l'univers viennent à varier ensemble suivant une même proportion ; supposons que les vitesses varient de même, mais suivant telle autre proportion que l'on voudra : y aura-t-il, pour un observateur placé dans cet univers, un moyen quelconque de distinguer son nouvel état de l'ancien ? tel est le problème des mondes semblables, selon l'expression de M. Renouvier, problème utile entre tous à approfondir, suivant le même philosophe.

Digitized by Google

Pour peu que l'on admette que les phénomènes de la matière sont réductibles à des phénomènes mécaniques [1], il semble que la réponse s'impose avec la plus évidente clarté et qu'on doive répondre, sans hésitation possible : non, il n'existe aucun moyen de discernement, si bien même qu'à vrai dire la question n'a pas de sens, car une variation proportionnelle universelle ne répond à aucune idée positive. Si tout, en effet, se réduit à des phénomènes mécaniques, on ne peut les envisager qu'au triple point de vue de la géométrie, de la cinématique et de la dynamique : or, d'un côté comme de l'autre, on aboutit au plus pur relativisme.

En abordant l'étude des géométries non euclidiennes, on croit d'abord que les dimensions y présentent une valeur absolue ; mais nous avons vu que ce n'est là qu'une illusion. Sans doute, dans un univers non euclidien, une figure ne peut, en général, être majorée, tout en conservant sa forme et en restant dans cet univers ; mais l'ensemble, au contraire, peut l'être dans sa totalité, avec son paramètre lui-même, qui subit la même majoration. Mais alors, si tout a subi ce changement, l'unité de mesure l'a subi elle-même, et rien ne distingue l'univers géométrique majoré de l'univers primitif.

Supposons maintenant une variation semblable de toutes les vitesses, indépendamment d'un changement dans les grandeurs géométriques ; que va-t-il en résulter au point de vue de l'étude cinématique du monde ? Comme la mesure d'une vitesse est donnée par le rapport d'un espace parcouru au temps employé à le parcourir, et comme, d'autre part, ce temps se mesure lui-même par un autre espace parcouru simultanément avec le premier, un accroissement

1. Par cette expression, nous désignons de la façon la plus générale tous les phénomènes géométriques et de mouvement. Nous aurons l'occasion de voir qu'on a parfois donné une acception beaucoup plus restreinte au terme « mécanisme ».

Digitized by Google

proportionnel de toutes les vitesses ne changera pas plus leurs valeurs numériques qu'un accroissement des dimensions ne changeait tout à l'heure celles des longueurs, et ces vitesses aux valeurs identiques à celles des premières correspondront à des temps numériquement identiques aussi aux temps correspondant aux premières vitesses. D'où il résulte forcément que l'apparence cinématique du monde n'aura nullement changé.

Si l'on remarque maintenant que la notion et la mesure de la masse, ainsi que la détermination de toutes les lois expérimentales de la dynamique, résultent exclusivement de l'étude des mouvements dans l'univers, on doit conclure que les unes et les autres ne seront en rien modifiées par des changements proportionnels soit de toutes les dimensions, soit de toutes les vitesses, ces deux ordres de changements pouvant se produire indépendamment ou non l'un de l'autre, puisque la mesure de toutes les grandeurs et de toutes les vitesses restera identiquement ce qu'elle était auparavant.

Notons ici que les longueurs et les vitesses ne sont pas deux variables absolument indépendantes l'une de l'autre ; mais il est aisé d'obtenir deux variables répondant à cette condition d'indépendance, en prenant pour mesure du temps, non une longueur parcourue, mais un angle de rotation. Dans les quelques calculs que nous signalerons, nous prendrons ainsi pour variables indépendantes les longueurs et les vitesses angulaires.

Les réflexions si simples qui précèdent nous paraissent résoudre de la façon la plus complète le problème des mondes semblables ; mais il a été l'objet de telles confusions, même de la part d'un philosophe qui, comme M. Renouvier, y paraissait moins exposé que tout autre, que nous croyons devoir étudier avec quelque détail les difficultés, parfois assez surprenantes, dont on a obscurci la solution de ce problème.

Digitized by Google

Le premier coupable semble n'être rien moins que Laplace, toujours cité, souvent combattu, mais par des arguments parfois bien faibles. Parlant de la loi de l'attraction réciproque au carré de la distance, il s'exprime en ces termes : « Une de ses propriétés très remarquables est que, si les dimensions de tous les corps de l'univers, leurs distances mutuelles et leurs vitesses venaient à croître ou à diminuer proportionnellement, ils décriraient des courbes entièrement semblables à celles qu'ils décrivent ; en sorte que l'univers, réduit ainsi successivement jusqu'au plus petit espace imaginable, offrirait toujours les mêmes apparences aux observateurs. Ces apparences sont, par conséquent, indépendantes des dimensions de l'univers, comme, en vertu de la loi de proportionnalité de la force à la vitesse, elles sont indépendantes du mouvement qu'il peut avoir dans l'espace. La simplicité des lois de la nature ne nous permet donc d'observer et de connaître que des rapports [1]. »

Après avoir rappelé ce passage, M. Bouasse, dans son intéressante *Introduction à l'étude des théories de la mécanique*, se borne à déclarer que, si les mouvements célestes n'étaient pas modifiés, les terrestres le seraient, et il prétend le prouver par un calcul sommaire sur la flexion d'un ressort et en faisant remarquer que bien des actions, par exemple celles des courants les uns sur les autres, n'obéissent pas à la formule newtonienne [2]. Ces objections seraient fondées si Laplace était dans le vrai en affirmant que la réponse au problème des mondes semblables dépend de la loi de la gravitation ; mais, en discutant les développements que M. Delbœuf a donnés de ces objections déjà formulées par lui, ainsi que les réponses insuffisantes faites par M. Renouvier à la thèse de Laplace, nous allons reconnaître que

1. *Exposition du système du monde*, liv. V, chap. v, *ad finem*.
2. P. 157 et 158.

Digitized by Google

ce problème est indépendant de toute loi particulière.

Avant d'entrer dans la discussion détaillée des assertions et des calculs de ces deux éminents penseurs, doublés chacun d'un mathématicien, nous devons signaler ce qui, à nos yeux, constitue leur erreur fondamentale et explique que nous puissions répudier les résultats de leurs calculs. M. Delbœuf pose en principe, et M. Renouvier admet comme hypothèse acceptable que les corps majorés ou minorés sont composés d'éléments identiques à ceux qui composent notre monde, en sorte que leur nombre est augmenté ou diminué. Or, il est absolument évident qu'on n'obtient pas ainsi un monde identique au nôtre, à l'échelle près ; quand nous posons l'hypothèse de cette identité, nous l'appliquons aux molécules qui composent les corps aussi bien qu'à l'enveloppe générale de ces corps, et, pour rendre notre pensée plus sensible, nous dirons que le résultat de la majoration d'une boîte pleine de grains de plomb n'est point une caisse également pleine de simples grains en plus grand nombre, mais une caisse pleine d'un égal nombre de balles.

Tâchant d'aboutir à une réponse aussi affirmative que possible au problème des mondes semblables, M. Renouvier s'efforce de corriger le vice originel de son hypothèse, tandis que M. Delbœuf en tire toutes les conséquences naturelles. Nous commencerons donc par étudier la curieuse brochure de celui-ci, ayant pour titre : *Mégamicros ou les effets sensibles d'une réduction proportionnelle des dimensions de l'univers;* cette brochure a pour conclusion que « l'espace réel est différent de l'espace géométrique », et que « les dimensions de l'univers sont absolues ».

Comme l'indique le titre que nous venons de reproduire, il n'est ici question que de la variation des dimensions, les vitesses angulaires restant les mêmes. M. Delbœuf étudie ce qui se passerait sur la terre si son rayon était réduit de

Digitized by Google

moitié, et comme on obtient ainsi à peu près le rayon de la planète Mars, il appelle martiens les habitants de cette terre réduite.

M. Delbœuf montre que la pesanteur est moitié moindre sur une planète de rayon moitié moindre aussi [1], en sorte que le nouveau litre d'eau, qui a un volume égal au 1/8 du litre terrestre, ne pèse que 1/16 de notre kilogramme. D'autre part, le mètre ne vaut plus que 50 de nos centimètres, et, dès lors, le kilogrammètre ne vaudra que 1/32 du nôtre. Or, ajoute M. Delbœuf, la force des habitants, qui est proportionnelle au volume ou à la masse de leurs muscles, n'est réduite qu'au 1/8, d'où il résulterait qu'ils seraient capables de produire un travail quadruple du nôtre.

Cette argumentation est irréprochable jusqu'au moment où il est question de la force des martiens ; mais là il est supposé implicitement que la combustion d'un certain volume de carbone produit la même quantité de chaleur dans les deux mondes, si l'on mesure ces volumes avec une même échelle. Or, cette proposition est incontestable pour qui suppose que la constitution intime des corps n'a subi aucun changement ; mais il n'en est pas de même si les atomes ou molécules sont devenus huit fois plus nombreux, avec réduction de leurs masses au huitième et de leurs distances mutuelles à la moitié. Dans ce cas, on peut se rendre compte que la réduction dans le rapport de 1/2 doit ramener la chaleur dégagée au 1/32, car cette chaleur est due à la force vive acquise, puis perdue par les atomes du carbone et de l'oxygène. Or, des deux facteurs de cette force vive la masse est réduite au 1/8, et le carré de la vitesse

1. La densité étant la même, la masse est réduite au huitième ; mais, la distance de la surface au centre étant moitié moindre, la gravité serait, à masse égale, quatre fois plus grande qu'à la distance d'un rayon terrestre.

Digitized by Google

au 1/4, puisque tous les mouvements ont eu, par hypothèse, leurs vitesses diminuées de moitié [1].

A cette objection, que nous avions formulée dans la *Revue philosophique*, M. Delbœuf a répondu en ces termes [2] : « Que m'objecte M. Lechalas? Il me dit — d'accord en ceci avec M. Tannery [3] — que l'hypothèse de la réduction ou de l'amplification de l'univers implique qu'on poursuive cette réduction ou cette amplification jusque dans les particules les plus ténues des êtres. Et là-dessus il triomphe. Soit! Mais, qu'il me permette de le lui dire, il enfonce une porte ouverte, et c'est à mon tour de triompher. — Qu'est-ce, en effet, que créer un carbone martien dont les atomes constituants ne sont plus que le 1/8 des atomes du carbone terrien et sont situés à la distance 1/2, de sorte que la chaleur dégagée par leur chute sur les atomes réduits d'un oxygène hypothétique n'est plus que le 1/32 de la chaleur dégagée sur la terre, si ce n'est supposer que *les propriétés du carbone et de l'oxygène dépendent uniquement du volume des atomes et de leurs distances*, c'est-à-dire *de la figure géométrique qu'ils forment dans l'espace euclidien?* Auquel cas il va de soi que la minoration ou la majoration de cette figure géométrique ne porte nulle atteinte à l'essence de ces mêmes propriétés. » Après avoir développé cette pensée, M. Delbœuf conclut ainsi : « En un mot, si l'univers n'était qu'une figure géométrique (euclidienne), il participerait des propriétés des figures géométriques. C'est un truisme. — Mais précisément il y a dans l'univers d'autres forces que la gravitation,

1. Nous verrons plus loin que rien n'oblige à faire varier les masses proportionnellement aux volumes; mais la modification que subirait la force vive altérerait dans le même rapport la valeur du travail, en sorte que la question est sans intérêt ici.

2. *Revue* de janvier 1894, p. 82.

3. Il résulte de la réponse de M. Delbœuf que non seulement M. Paul Tannery, mais encore MM. Franz Brentano et Calinon lui ont fait des objections analogues aux nôtres.

Digitized by Google

d'autres propriétés que des propriétés géométriques, — du moins il y a lieu de le penser. M. Lechalas les méconnaît et passe à côté d'elles. »

D'abord, il convient de mettre de côté l'euclidianisme de la géométrie, car nous avons vu qu'il n'intéresse point la question. Ensuite, il n'est pas exact de dire que nous n'envisageons dans l'univers qu'une figure géométrique : nous le considérons comme un système *mécanique*, ce qui ajoute la notion de masse aux notions purement géométriques. Cela noté, nous reconnaissons (et nous avons eu soin de le dire dès l'abord) que nous admettons que toutes les propriétés physico-chimiques sont réductibles à des phénomènes mécaniques, au sens large du mot. Si l'on n'admet pas cette hypothèse, sous l'inspiration de laquelle se sont produits tous les progrès des sciences physiques, il est clair que le problème des mondes semblables reste sans solution, puisque chacun peut attribuer aux substances chimiques du monde minoré les propriétés qui lui conviennent. Argumenter sur la question, c'est admettre l'hypothèse mécanique ou parler pour ne rien dire. En tout cas, nous sommes toujours fondé à remarquer que refuser de réduire les éléments des corps de façon à en laisser le nombre constant, c'est se placer absolument en dehors du problème des mondes semblables et y substituer celui des *objets semblables*, qui n'est pas du tout le même et intéresse surtout les ingénieurs[1]. Quant aux phénomènes psychologiques, que M. Delbœuf nous reproche d'avoir passés sous silence, nous avions implicitement montré que, à notre point de vue, il n'y avait pas, en ce qui les

1. Voir dans les *Annales des Ponts et Chaussées* de 1885, 2e sem., p. 569, un mémoire de M. de Perrodil sur la résistance comparée des constructions semblables.

Quand nous parlons de réduire les éléments des corps, nous ne voulons pas dire que les atomes soient étendus, mais qu'on doit supposer leurs distances réduites.

Digitized by Google

concerne, la plus petite difficulté : pour nous, en effet, la relativité essentielle des grandeurs spatiales enlève tout sens à la conception d'un changement d'échelle de l'univers, l'univers primitif et l'univers prétendu majoré étant identiques; dans ces conditions, il n'y a aucune raison pour que les phénomènes psychiques soient modifiés par un changement physique sans réalité.

Ces explications sur notre différend avec M. Delbœuf nous dispensent, en principe, de discuter les divers cas particuliers qui lui ont fourni l'occasion de donner libre carrière à sa verve si séduisante. Nous en examinerons cependant encore un, invoqué aussi, nous l'avons vu, par M. Bouasse, celui de la flexion d'un ressort, qui, au lieu d'être égale à la moitié de la flexion primitive, n'en serait que le huitième. Pour le prouver, M. Delbœuf prend la formule qui donne la flexion d'un ressort à boudin [1], formule dans laquelle entre un coefficient G que, sans commentaire, il suppose constant ; or, c'est un coefficient d'élasticité qui est sans doute constant pour une matière donnée, mais qui varie quand on passe d'une matière à une autre, ce qui, à vrai dire, est notre cas [2] ; la condition d'égalité de flexion à l'échelle, condition essentielle dans le problème des mondes semblables,

1. $$f = \frac{64n}{G} + \frac{Pr^3}{d^4},$$

n, nombre des spires; G, « un coefficient »; P, poids suspendu au ressort; r, rayon intérieur de la spire; d, diamètre du fil.

2. On s'étonnera peut-être de ce que nous disions, tantôt que la variation d'échelle ne change rien et tantôt qu'elle modifie jusqu'à la nature intime de la matière. Cela tient (et le contexte permet de faire aisément la distinction) de ce que la première assertion suppose un observateur dépendant du monde minoré, et la seconde un observateur extérieur conservant son échelle primitive de mesure.

Digitized by Google

où tous les mouvements sont supposés conservés, nous permet de conclure immédiatement que ce coefficient d'élasticité, figurant au dénominateur, doit avoir une valeur quatre fois moindre après la réduction des éléments de la matière, si l'on fait les mesures avec une échelle constante.

Cette similitude de pensée, que nous allons voir s'affirmer encore entre MM. Delbœuf et Bouasse, deux esprits cependant de tendances bien différentes à certains égards, tient à une cause qu'il peut être intéressant de faire ressortir. Le premier, nous l'avons vu, tient pour l'existence, dans la matière, de qualités pures, non réductibles objectivement à des conditions mécaniques. Le second appartient à la nouvelle école de savants positivistes qui, sous la direction brillante de M. Duhem, refuse toute valeur explicative aux théories physiques. Or, celui qui admet des qualités pures ne peut accepter qu'on les change par une modification d'ordre mécanique, et celui qui répudie toute hypothèse sur la constitution de la matière, n'admettant que des formules directement vérifiables, s'enferme forcément dans ces formules et ne peut considérer les conséquences de changements à une constitution qu'il tient pour un inconnaissable absolu.

Nous ne devons donc pas être surpris de voir le professeur de Liège et le professeur de Toulouse d'accord sur le problème des mondes semblables, notamment pour soutenir que, si certaines forces ne sont pas inversement proportionnelles au carré des distances, les phénomènes qui en dépendent varient avec l'échelle du monde, ce qui, d'ailleurs, est tout à fait conforme à l'opinion de Laplace.

Il faut reconnaître qu'un examen superficiel la ferait facilement adopter. La loi newtonienne exprime que l'accélération relative imprimée par un corps de masse m à un autre corps de masse m', situé à une distance r, est proportion-

Digitized by Google

nelle à $\frac{m + m'}{r^2}$; or, cette expression se réduit dans le même rapport que les dimensions du monde, puisque m et m' sont de puissance 3, par rapport aux dimensions linéaires. On voit que la réduction aurait lieu dans un autre rapport, si r figurait au dénominateur avec un autre exposant.

M. Renouvier se livre sur ce sujet à une discussion bien curieuse, parce qu'on y voit son relativisme doctrinal se débattre contre les conséquences d'une conception illogique des mondes semblables. L'origine de ses difficultés se trouve dans sa définition de la masse, qui serait « le nombre effectif des sièges d'actions élémentaires [1] », ou plus exactement un nombre proportionnel à ce dernier. Cette conception a tout d'abord le défaut de reposer sur une hypothèse, car rien n'exige que tous ces sièges aient des masses égales, en prenant le mot en son sens purement mathématique. Cette faute de logique a une conséquence très grave, car elle conduit à admettre que le nombre de ces sièges varie dans le même rapport que les volumes, lors des changements d'échelle de l'univers, et c'est là précisément l'erreur de M. Delbœuf. Afin d'échapper à la conséquence forcée que la réponse au problème des mondes semblables est liée à l'existence de la loi newtonienne, M. Renouvier est obligé d'avoir recours à une conception assez bizarre et qui, au fond, ne résout rien. Il considère qu'on peut faire varier arbitrairement le nombre des sièges d'action, c'est-à-dire la masse, alors qu'on fait subir une variation déterminée aux dimensions. Dès lors, la masse ne varie pas forcément proportionnellement au volume, et, par suite, on peut toujours lui attribuer une variation telle que l'accélération varie elle-même proportionnellement à la première puissance des dimensions linéaires. Cette solution apparaît, dès l'abord, comme singu-

1. *Logique*, tome III, p. 50.

Digitized by Google

lièrement arbitraire ; puis, son insuffisance s'impose quand on songe que, si toutes les forces ne varient pas suivant la même loi, on serait amené à attribuer des masses différentes à un même corps, ce qui est inadmissible et oblige à repousser absolument l'artifice proposé par M. Renouvier.

Faut-il donc se rallier à la thèse de Laplace et de M. Delbœuf? en aucune façon, et la solution de la difficulté est des plus simples. L'accélération relative communiquée par un corps ou un élément matériel à un autre étant proportionnelle à la somme de leurs masses et à une certaine fonction de leur distance, si les mouvements ne répondent plus, après la réduction proportionnelle, aux mêmes formules qu'auparavant, pour un observateur ayant conservé une échelle invariable, cet observateur pourra opérer la rectification de ses formules soit en changeant les valeurs attribuées aux masses, soit en révisant les fonctions des distances. Nous venons de constater l'échec du premier procédé, échec facile à prévoir : les masses des corps n'étant que des coefficients dont les rapports seuls sont déterminés, notre observateur est libre d'attribuer aux masses des corps du monde réduit des valeurs quelconques, pourvu qu'elles soient proportionnelles aux masses des corps correspondants dans le monde primitif. En usant de cette liberté, il fait une simple opération arithmétique, sans portée aucune, et d'où il ne saurait rien tirer ; s'il veut à tout prix en faire sortir quelque chose, il tombera dans des contradictions telles que celle que nous avons constatée.

C'est donc aux fonctions des distances qu'il faut s'adresser, et, en ce faisant, on ne fera qu'opérer une révision qui s'imposait d'elle-même, car, *a priori*, on peut affirmer que, s'il existait dans le monde primitif des forces dont les lois fussent différentes les unes des autres, les formules exprimant ces lois pour le monde réduit, en conservant la première échelle, doivent forcément différer des premières ;

Digitized by Google

en effet, si les formules primitives donnaient, par exemple, l'égalité pour une certaine distance, les nouvelles devraient la donner pour une distance moitié moindre. Comme d'ailleurs il n'y a aucune nécessité d'attribuer une valeur spéciale au coefficient de variation des masses, la formule de transformation doit, pour être générale, comprendre un coefficient arbitraire ; nous établissons en note cette formule générale [1].

On peut voir maintenant à quoi se réduit le privilège attribué par Laplace à un monde où toutes les forces seraient inversement proportionnelles au carré des dis-

1. Appelant j et j_1 les accélérations avant et après la réduction, l et l_1 deux longueurs correspondantes et k un coefficient arbitraire, on a :

$$\frac{j}{j_1} = \frac{l}{l_1} = \frac{(m + m').\varphi(r)}{(m_1 + m'_1).\varphi_1(r_1)}.$$

Comme :

$$\frac{m + m'}{m_1 + m'_1} = k,$$

on en tire :

$$\varphi_1(r_1) = k\,\varphi(r).\frac{l_1}{l}.$$

Or :

$$r = r_1.\frac{l}{l_1}.$$

D'où :

$$\varphi_1(r_1) = k\,\varphi\left(r_1.\frac{l}{l_1}\right).\frac{l_1}{l}.$$

Comme vérification, si nous supposons que les masses varient proportionnellement aux volumes et que $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$, nous trouvons $\varphi_1(r_1) = \frac{1}{r_1^2}$.

Digitized by Google

tances : il consiste en ce que, si un observateur extérieur admet que les masses varient proportionnellement aux volumes, les lois dynamiques seront exprimées par les mêmes formules qu'avant le changement d'échelle. Quant à l'observateur intérieur, dont l'échelle de mesure varie en même temps que les dimensions du monde, pour lui, les formules restent immuables, quelles qu'elles soient, et rien ne peut lui révéler une variation, qui, nous le répétons, n'a aucun sens si on la suppose universelle.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que rien n'était changé aux vitesses angulaires, ce qui avait pour conséquence de faire varier les vitesses linéaires et accélérations dans le même rapport que les simples longueurs. Nous allons voir qu'il existe une complète indépendance entre celles-ci et les vitesses angulaires, les unes et les autres pouvant varier sans qu'aucun lien les unisse. Ici encore, les conceptions opposées de M. Renouvier nous feront mieux approfondir la question.

« Il y a, dit-il, indépendance quant à notre manière de voir, *c'est-à-dire avant de consulter l'expérience*, entre l'espace..., d'une part, et, d'autre part,... le temps [1]. »

« Mais, ajoute-t-il plus loin, il n'en est plus ainsi *quand nous regardons aux lois de la nature*. La première de toutes est celle qui lie l'espace au temps dans la perception du mouvement. Comme nous ne mesurons le temps qu'en mesurant de certains espaces parcourus, et supposés égaux pour des temps égaux, les apparences ne peuvent être conservées, pour nous, dans l'univers renflé ou réduit de l'hypothèse, qu'autant que les corps mus se retrouvent aux mêmes lieux au bout des mêmes temps. Or, ceci exige que les vitesses et leurs accélérations soient multipliées par le

1. *Logique*, t. III, p. 49.

Digitized by Google

même facteur constant que le sont les dimensions et les distances [1]. »

A un point de vue purement philosophique, il y a là une pensée bien faite pour surprendre chez le chef illustre du néo-criticisme, car qu'y a-t-il de plus contraire à toutes ses tendances que de faire fléchir une conception apriorique devant l'expérience? Ce manque de fermeté l'a induit en erreur, et il est d'autant plus aisé de le voir qu'il s'est placé à un point de vue purement cinématique.

Bien loin de le suivre dans son argumentation, nous prendrions plutôt le contre-pied de celle-ci. C'est précisément parce que nous ne pouvons mesurer les temps qu'au moyen des mouvements que les vitesses peuvent être regardées comme indépendantes des variations proportionnelles des longueurs, puisque, pourvu que tous les points matériels se trouvent simultanément dans les mêmes positions relatives, on devra dire que, pour un observateur intérieur au système, les mouvements se sont effectués dans le même temps, quelles que soient les variations de vitesses pour un observateur extérieur.

Du moment que les longueurs et les vitesses linéaires peuvent varier indépendamment les unes des autres, il est encore plus simple et de nature à moins prêter aux confusions, nous l'avons déjà dit, de poser l'indépendance des longueurs et des vitesses angulaires, et c'est à cette conception que nous nous attacherons pour discuter les objections d'ordre dynamique que M. Delbœuf oppose à la thèse de la relativité du temps, dans son *Essai de logique scientifique*. Après avoir défini le *temps mécanique* comme étant *un mouvement uniforme arbitraire pris pour unité de mouvement* (définition où le mot « uniforme » est de trop, puisqu'un mouvement mérite cette qualification par définition, du moment

1. P. 51.

Digitized by Google

qu'on le prend pour unité de mouvement) ; après avoir, disons-nous, posé cette définition, le professeur belge reconnaît que ce temps est une quantité toute relative, mais il se hâte d'ajouter : « En est-il de même du temps *réel ?* »

« Non, répond-il. Quoi que cette opinion ait d'étrange au premier abord, rien de plus facile que de réfuter scientifiquement ceux qui pensent le contraire. — Prenons le problème comme se le posait Balmès[1] : *Si le soleil doublait la rapidité de sa course, si le même changement affectait le ciel et le système terrestre tout entier, si, enfin, cette accélération s'étendait jusqu'à nous et nos idées*, serait-il vrai *qu'il fût impossible* de percevoir le changement ? Nous répondrons sans hésiter : Non !

« Ainsi entre autres, la force centrifuge serait, à l'équateur, quatre fois plus considérable qu'elle ne l'est maintenant, et la différence qu'il y a entre la durée des oscillations du pendule au pôle et à l'équateur, même en tenant compte de la modification qu'éprouverait, prétendûment à notre insu, le mouvement du pendule lui-même, cette différence, disons-nous, changerait subitement. Ainsi, pour prendre un exemple plus frappant, si nous accélérons dans la proportion de 1 : 17 tous les mouvements de l'univers, tant matériel qu'intellectuel, il n'en serait pas moins vrai qu'au pôle le pendule conserverait le même mouvement qu'il a actuellement, c'est-à-dire qu'il nous paraîtrait à nous que son mouvement est 17 fois plus lent, et qu'à l'équateur, au contraire, il cesserait complètement d'osciller, ou que la durée de ses oscillations serait infinie, puisqu'il tournerait indéfiniment autour de son point de suspension. D'ailleurs, conclut triomphalement M. Delbœuf, il est heureux que la science vienne contredire une assertion aussi spécieuse et qu'on est tout d'abord tenté d'adopter[2]. »

1. *Philosophie fondamentale*, VII, 5 et 6.
2. P. 275 à 277.

Digitized by Google

Eh bien ! ne lui en déplaise, la science est loin de contredire Balmès, et la raison en est tout simplement qu'il a, sans s'en douter, complètement faussé les données du problème, en oubliant d'accroître la vitesse de la chute des corps en même temps que celle de la rotation de la terre, si bien qu'il la trouve nulle en supposant l'attraction constante, quand la vitesse de rotation est accrue dans le rapport de 1 à 17. Lorsqu'on voit un penseur si profond et si savant à la fois tomber dans de telles méprises, on tremble à la pensée de celles qu'on est exposé soi-même à commettre. Ajoutons que, la réfutation qui précède ayant été insérée dans la *Critique philosophique*, M. Delbœuf a su, avec la parfaite bonne foi et la belle humeur qui rendent si charmantes les polémiques qu'on a avec lui, reconnaître l'erreur contenue dans son argumentation; mais il ne faudrait pas le croire converti pour si peu : c'est à recommencer, conclut-il simplement[1].

Pour soumettre l'ensemble de nos conclusions à une vérification, bien superflue d'ailleurs, on peut supposer un observateur extérieur au système, ayant conservé les termes de comparaison qui ont servi précédemment à mesurer les espaces et les temps, et chercher si la nouvelle vitesse de rotation doit croître dans le même rapport que l'ancienne pour annuler l'action de la pesanteur, après qu'on a fait varier et les dimensions linéaires et les vitesses angulaires dans des rapports quelconques, indépendants l'un de l'autre. Un calcul fort simple, que nous donnons en note, permet de constater qu'il en est bien ainsi [2].

1. *Revue philosophique* d'avril 1895, p. 363, note.

2. Dans l'état primitif, l'attraction à annuler est égale, pour un corps de masse m, à la somme du poids mg et de la force centrifuge $m\mathrm{R}\omega^2$. Appelant x la vitesse angulaire cherchée, on aura donc :

$$mg + m\mathrm{R}\omega^2 = m\mathrm{R}x^2$$

Digitized by Google

Nous arrivons donc à affirmer la complète relativité et de l'espace et du temps. En présence de cette affirmation sans restriction ni réserve aucune, la conception d'un univers subissant des variations proportionnelles dans ses dimensions ou dans ses vitesses et celle d'un observateur extérieur conservant ses unités de mesure s'évanouissent comme de vaines fictions : d'universelles variations proportionnelles

ou :

$$\frac{x^2}{\omega^2} = 1 + \frac{g}{R\omega^2}.$$

Si R devient $R_1 = kR$ et ω devient $\omega_1 = l\omega$, toutes les longueurs et toutes les vitesses éprouvant des variations correspondantes, on aura comme précédemment :

$$\frac{x_1{}^2}{\omega_1{}^2} = 1 + \frac{g_1}{R_1\omega_1{}^2}.$$

Cherchons la valeur de g_1 ; d'une façon générale, toute accélération j devient $j_1 = k.\ l^2 j$, car toutes les vitesses varient dans le même rapport que les vitesses de rotation $\frac{R_1\omega_1}{R\omega} = kl$, et, d'autre part, les temps varient en raison inverse des vitesses angulaires, en sorte qu'on a :

$$dv_1 = kl.dv,$$

$$dt_1 = \frac{dt}{l}.$$

D'où :

$$j_1 = \frac{dv_1}{dt_1} = kl^2 \frac{dv}{dt} = kl^2.j,$$

et en particulier $g_1 = kl^2 g$.

Substituant cette valeur on obtient :

$$\frac{x_1{}^2}{\omega_1{}^2} = 1 + \frac{kl^2 g}{kR\ l^2\omega^2} = 1 + \frac{g}{R\omega^2} = \frac{x^2}{\omega^2}.$$

Digitized by Google

créeraient un univers indiscernable du premier, ce qui veut dire que l'hypothèse n'a pas de sens, et, quant à l'observateur extérieur, qui dira si ce sont ses unités qui sont restées constantes ou si c'est le monde, dont elles ne font pas partie?

Nous n'avons parlé que des phénomènes physiques; mais, comme l'a noté Balmès, il faut que la concordance soit maintenue entre les phénomènes psychiques et les premiers, attendu qu'une accélération des mouvements ne constituerait pas une accélération universelle, si elle n'était pas accompagnée d'une accélération égale des phénomènes de l'âme. Ici, en effet, à la différence de ce que nous avons constaté à l'occasion de la majoration des dimensions, ces derniers phénomènes sont partie intégrante de l'univers, puisqu'ils revêtent la forme du temps, aussi bien, et peut-être mieux, que les phénomènes physiques.

Comme on n'a jamais pu établir aucun lien de nécessité entre les deux ordres de phénomènes, on peut évidemment poser l'hypothèse de deux variations non concordantes, et alors il est superflu de constater que le nouvel univers différerait du premier; on peut ajouter qu'il le ferait d'une façon qui serait peu à son avantage, car il y aurait une parfaite incohérence à la place de l'harmonie qui existe entre la matière et l'esprit. Si l'on maintient les lois de l'union de l'âme et du corps, la concordance des deux variations se trouvera par là même réalisée, au moins pour tous les phénomènes psychiques dont on a pu établir la liaison avec les états physiologiques. Quant à ceux qu'on pourrait supposer échapper à une telle liaison, on ne saurait les soustraire à la loi générale d'accélération sans jeter la perturbation la plus profonde dans le monde psychique lui-même.

M. Bergson, dans sa thèse si justement remarquée *sur les*

Digitized by Google

Données immédiates de la conscience, se prononce pour une différence essentielle entre la durée « réelle » et la durée de la mécanique : « Supposons un instant, dit-il, qu'un malin génie, plus puissant encore que le malin génie de Descartes, ordonnât à tous les mouvements de l'univers d'aller deux fois plus vite. Rien ne serait changé aux phénomènes astronomiques ou, tout au moins, aux équations qui nous permettent de les prévoir, car, dans ces équations, le symbole *t* ne désigne pas une durée, mais un rapport entre deux durées, un certain nombre d'unités de temps, ou, enfin, en dernière analyse, un certain nombre de simultanéités; ces simultanéités, ces coïncidences se produiraient encore en nombre égal; seuls, les intervalles qui les séparent auraient diminué; mais ces intervalles n'entrent pour rien dans les calculs. Or, ces intervalles sont précisément la durée vécue, celle que la conscience perçoit; aussi la conscience nous avertirait-elle bien vite d'une diminution de la journée, si, entre le lever et le coucher du soleil, nous avions moins duré. Elle ne mesurerait pas cette diminution, sans doute, et même elle ne l'apercevrait peut-être pas tout de suite sous l'aspect d'un changement de quantité; mais elle constaterait, sous une forme ou sous une autre, une baisse dans l'enrichissement ordinaire de l'être, une modification dans le progrès qu'il a coutume de réaliser entre le lever du soleil et son coucher [1]. » On voit ce que cette conception a d'original : tous les phénomènes psychiques semblent participer à l'accélération du monde matériel, puisqu'aucun bouleversement ne se manifeste, mais, cependant, la durée véritable restant la même, le développement intime de la conscience se trouve moindre dans la nouvelle journée. Des hypothèses de ce genre sont irréfutables, au sens strict du mot; mais on peut montrer qu'elles

1. P. 147.

Digitized by Google

sont purement gratuites. Il y a, sans doute, une observation profonde dans cette remarque d'une sorte de durée intime nécessaire au développement de la conscience : le temps est nécessaire à celle-ci pour s'assimiler tout ce qui la nourrit, pour ainsi dire. Mais ici encore tout n'indique-t-il pas que le physique et le moral sont profondément unis ? cette assimilation psychique ne correspond-elle pas à ces phénomènes de nutrition nécessaires à la constitution de la mémoire, comme l'a si bien montré M. Ribot? Or, ces phénomènes sont physiques et participent à l'accélération mécanique ; d'où il suit que les consciences mûriront, pour ainsi dire, plus vite, aussi elles, et ne ressentiront point cette baisse qu'imagine M. Bergson.

Sans doute, on ne saurait, en pareille matière, répondre d'une façon démonstrative, parce que, comme le disait Malebranche, nous n'avons pas d'idée claire de notre âme et de ses modalités, en sorte que chacun fait une réponse conforme à ses tendances et fatalement entachée de subjectivité. Sous cette réserve, nous ne pouvons que déclarer ne voir aucune raison pour qu'une accélération proportionnelle de tous nos états d'âme nous fût perceptible. Le sentiment du temps tient à bien des choses : le nombre des états psychiques et aussi leur qualité influent beaucoup sur notre appréciation de la durée ; mais le nombre même présente souvent un caractère illusoire, car il suffit d'une succession d'états fort différents, comme dans les rêves, pour donner l'impression d'une succession très prolongée. Quant à la qualité, il suffit de rappeler combien, dans l'ennui, des états, cependant presque indiscernables, laissent l'impression d'un long temps, ce qui a même fourni à un ingénieux écrivain le thème d'un subtil éloge de l'ennui [1]. Quand, d'ailleurs, on cherche à se donner une impres-

1. « J'ai plaisir à penser que de longues heures je vais être

Digitized by Google

sion aussi objective que possible du temps sans s'adresser aux phénomènes extérieurs, ce sont des sensations purement physiologiques, c'est-à-dire se rapprochant autant que possible de celles que produisent en nous les phénomènes purement mécaniques, que l'on doit prendre pour base de ses appréciations. C'est ainsi que, d'après les études de Münsterberg, pour apprécier exactement les durées, il faut diriger son attention sur des processus musculaires, dans lesquels la respiration joue un rôle prépondérant [1]. Dans ce dernier cas, on se rapproche du mécanisme, et, par suite, l'indiscernabilité de deux régimes ne différant que par ce qu'on pourrait appeler improprement la vitesse absolue des sensations apparaît comme à peu près incontestable. Quant aux autres sensations ou sentiments, la chose est, sans doute, moins évidente; mais, pour nous, nous ne voyons *aucune* raison d'admettre une possibilité de discernement.

Ainsi nous arrivons à formuler, pour l'ensemble de l'uni-

seul, et m'ennuyer alors, bien heureusement m'ennuyer... Je sais que je transmuterai cette sensation d'ennui interminable en sensation de vie interminable, ce que jamais ne donnent les joies, qui, si longues soient-elles, sont toujours courtes... Et donc chacun des jours qui me retrouvera aimant la vie devra m'entendre aussi bénir l'ennui, le suave et le divin ennui » (*Promenades sentimentales* par M. Jean Thorel).

1. Voir des analyses des travaux du professeur de Fribourg dans la *Revue philosophique* (1890, 2me sem., p. 188, et 1893, 1er sem., p. 327). Voir aussi dans l'*Année psychologique* (1894) de MM. Beaunis et Binet, le résumé des dernières études de Münstenberg et Meumann (p. 365 et 371).

On sait que Royer Collard, développant la philosophie de l'effort volontaire de Maine de Biran, prenait « pour unité de durée l'instant déterminé par l'effort qui produit un pas », et, pour lui, « si le pendule peut nous servir à mesurer la durée, c'est que nous comparons ses oscillations à la durée de nos efforts volontaires ». On remarquera que le mouvement de la marche n'est une bonne mesure de la durée que lorsqu'il est devenu automatique et que la volonté n'y intervient plus directement.

Digitized by Google

vers physique et psychologique, la conclusion d'abord posée pour le monde matériel seul : deux univers semblables, tant par rapport à l'espace qu'à celui du temps, sont indiscernables, et, par suite, l'hypothèse de leur distinction entraîne contradiction. C'est l'affirmation, sous sa forme la plus complète, de la relativité de l'espace et du temps.

II

LA RÉVERSIBILITÉ DU MONDE MATÉRIEL

Non seulement le temps est purement relatif, mais il semble que les lois de la mécanique tendent à faire disparaître la notion de l'avant et de l'après. C'est une question qui mérite un examen attentif.

On admet généralement que tous les phénomènes physiques s'expliquent par l'hypothèse d'actions répulsives ou attractives s'exerçant entre les atomes et ne dépendant que de leurs distances respectives, en ce sens, du moins, que deux atomes déterminés étant donnés, leur action réciproque est indépendante et de leur vitesse relative et de la position des autres atomes.

Cette hypothèse étant admise, on démontre que, si l'on suppose à un instant quelconque toutes les vitesses changées de sens, le système matériel considéré repassera successivement par tous ses états antérieurs, pourvu qu'il soit isolé, c'est-à-dire ne subisse aucune action extérieure. Comme tel est le cas de l'ensemble de l'univers, la proposition précédente lui serait applicable. La conséquence consistant dans la suppression de l'avant et de l'après apparaît immédiatement, car un état de l'univers peut indifféremment être considéré comme la cause d'un autre ou comme causé par celui-ci : il suffit, dans les formules, de

Digitized by Google

changer t en $-t$ pour renverser l'ordre des phénomènes, et, en l'absence d'une distinction étrangère à la mécanique, il n'y aura, semble-t-il, aucun moyen de considérer l'un des ordres de succession comme plus vrai que l'autre.

Philippe Breton[1] a longuement étudié cette question de la réversibilité de l'univers, dans plusieurs articles publiés par *Les Mondes* de décembre 1875, revue scientifique de l'abbé Moigno, et réunis avec additions dans les *Actualités scientifiques* de 1876 du même abbé. Partant, d'ailleurs, de l'hypothèse psycho-physiologique, si bien établie dans la majeure partie de ses conséquences, il en concluait que la réversibilité s'étendrait aux phénomènes d'ordre psychologique, ce qui l'amenait à repousser la réversibilité mécanique et à rechercher quelle lacune pouvait bien exister dans la science. Il crut trouver le secret de la difficulté dans une certaine vertu plus ou moins occulte du temps, et il réclama « l'introduction, dans l'emploi mathématique du temps, de quelque condition, expressément manifestée par la notation », qui ne permît pas de confondre le passé et l'avenir.

Reprenant la question dans son ouvrage d'un si haut intérêt sur *les Confins de la science et de la philosophie*, le P. Carbonnelle a fait bonne justice de cette échappatoire : « Aucune précaution comme celle que suggère M. Breton, dit-il, ne peut avoir la moindre influence sur les conclusions qu'il voudrait écarter; car, si l'on change le signe du temps, ce n'est pas pour rendre possible le problème réverti, ni même, à proprement parler, pour le résoudre; c'est uniquement pour le comparer au problème primitif et relier entre elles les deux solutions. Chaque fois que nous savons résoudre l'un quelconque des deux, nous saurons résoudre

1. De son vivant, ingénieur des Ponts et Chaussées à Grenoble, connu par des études sur les torrents.

Digitized by Google

l'autre, directement, par les mêmes procédés, et sans recourir à la considération d'aucun temps négatif [1]. »

Abordant la question de front et sans faux-fuyant, le P. Carbonnelle arrive à une solution qui fait songer au fameux *démon distributeur* de Maxwell. Prenons avec lui l'exemple d'un corps pesant qui tombe verticalement dans le vide et s'arrête à la surface du sol. « On sait, dit-il, que le choc transforme toute la force vive de ce corps en une quantité équivalente de chaleur; mais on sait assez, par l'expérience, qu'il n'y a pas moyen de produire le phénomène inverse. On aurait beau renverser le cycle, ou plutôt la série, et commencer par donner de la chaleur au sol et au corps pesant lorsqu'ils sont en contact, jamais le corps pesant ne quittera le sol pour remonter au point d'où il est descendu. Cela se comprend aisément si l'on considère, dans cette chute et dans cette élévation de température, les phénomènes élémentaires dont ils se composent. Dans la chute, tous les atomes du corps pesant ont des vitesses égales et parallèles. C'est un état simple et uniforme, naturellement produit par une cause unique, la pesanteur. Mais cette simplicité et cette uniformité disparaissent au moment du choc, parce que les forces moléculaires multiples du corps et du sol entrent alors en jeu, et il en résulte un ensemble qu'à un certain point de vue on pourrait appeler désordonné, de vitesses atomiques inégales dans toutes les directions. A cet état correspond une certaine température dans les divers points des deux corps en contact; mais la même température correspondrait à une infinité d'autres états vibratoires. Quelles sont les conséquences de cette transformation? Sans doute, il est parfaitement certain que si plus tard, à un moment quelconque, on donnait à tous les atomes des corps des vitesses égales et directement oppo-

1. 2e édit., t. I, p. 344.

Digitized by Google

sées à celles que le choc a produites, il en résulterait, non seulement la même température, mais encore toute une série exactement inverse de phénomènes, de façon que le corps pesant se détacherait du sol avec la vitesse qu'il avait en y arrivant et remonterait verticalement à la hauteur d'où il est tombé ; mais, pour cela, il ne suffit pas de faire absorber une certaine quantité de chaleur et d'arriver à une certaine distribution de la température ; pas plus que, pour faire un livre, il ne suffit de réunir dans un ordre quelconque le million de lettres dont il se compose. Il faudrait, entre tous les états vibratoires en nombre infini qui correspondent à la même distribution de la température, choisir exactement l'état inverse de celui qu'a produit le choc. De quelque façon qu'on s'y prenne pour communiquer la température, on n'a aucune chance de rencontrer cet état vibratoire particulier ; et l'on comprend par suite que, malgré la possibilité théorique du contraire, le phénomène se passe toujours comme l'expérience nous le montre [1]. »

Ici, on sera peut-être tenté de faire une objection : sans doute, dira-t-on, la probabilité de vitesses précisément égales et contraires peut être considérée comme nulle ; mais l'expérience montre que non seulement on ne peut faire remonter le corps là précisément d'où il est tombé, que non seulement même on ne peut lui faire quitter le sol d'aucune façon, mais encore qu'on ne peut lui faire perdre aucune partie de son poids. N'y a-t-il pas là une infinité de combinaisons dont quelques-unes devraient se produire de temps à autre, si la théorie était exacte ?

On pourrait certainement démontrer que cette infinité de combinaisons de vitesses est infiniment petite par rapport à l'infinité de celles qui ne produisent aucune modification appréciable du poids ; mais nous pouvons invoquer un

1. I, 326-328.

Digitized by Google

exemple caractéristique d'un cas analogue. La réalité des interférences optiques est constamment vérifiée, et il en résulte, suivant les cas, que l'addition de deux ondulations produit soit de l'obscurité, soit une lumière plus intense que la somme des deux lumières isolées ; or, si l'on prend deux sources de lumière naturelle, c'est-à-dire non polarisée, où les vibrations sont pour ainsi dire désordonnées, on constate toujours que les deux intensités lumineuses s'ajoutent purement et simplement, c'est-à-dire que les phénomènes d'interférence s'annulent réciproquement. Ainsi doit-il en être des vibrations calorifiques dont la convergence d'effets pourrait soulever le corps ou, au contraire, l'appliquer plus fortement sur le sol.

La discussion du P. Carbonnelle, que nous avons rapportée, montre bien que, pour assurer en fait la réversibilité, il nous faudrait le démon de Maxwell, qui, sans rien changer à la température, orienterait convenablement toutes les vibrations, de même qu'il s'oppose à la diffusion de la chaleur en envoyant à droite les atomes dont la vitesse est supérieure à une certaine valeur et à gauche ceux dont la vitesse est moindre [1]. Nous pourrions reprendre, après Philippe Breton et le P. Carbonnelle, maint autre exemple, notamment celui des cônes d'éboulis qui se forment au pied de certains rochers. Nous n'y retrouverions, au fond, qu'une complication de l'exemple précédent : à l'impossibilité pratique déjà reconnue de l'impulsion à recevoir par les pierres éboulées pour qu'elles reprennent le chemin du sommet de la montagne, viendraient s'ajouter toutes les coïncidences nécessaires de chocs et même de coups de vent, sans lesquelles chaque fragment *manquerait*, pour

1. Voir le résumé d'une conférence de sir William Thomson sur le *démon* dans ses *Conférences scientifiques et allocutions* sur la constitution de la matière, traduites par MM. Lugol et Brillouin.

Digitized by Google

ainsi dire, la place qu'il doit reprendre, et retomberait sous l'influence de la pesanteur. On voit apparaître ici très nettement le caractère d'*instabilité* des phénomènes révertis, en sorte qu'un univers construit sur ce modèle serait, qu'on nous passe l'expression, absolument *truqué*. Le P. Carbonnelle en conclut qu'un être libre y disposerait d'un énorme pouvoir, de nature à entraîner les plus grands bouleversements à l'occasion d'un acte insignifiant ; mais on échapperait à cette conclusion en adoptant la théorie de l'harmonie préétablie, qui suppose un truquage tel que celui que nous venons de décrire, en tout ce qui touche les mouvements des êtres vivants.

Rien ne permet assurément de rejeter *a priori* cette théorie de l'harmonie préétablie ; mais on doit reconnaître qu'elle ne semble pas *en harmonie* avec l'ensemble du système du monde dans lequel nous voyons régner, au contraire, une sorte d'équilibre stable, grâce auquel les causes secondaires ne produisent que des changements également secondaires. Ceux qui hésitent, comme nous, entre les théories de Leibniz et de Malebranche peuvent trouver ici une indication en faveur des causes occasionnelles.

Quoi qu'il en soit de cette digression, on doit remarquer que cette instabilité de l'univers réverti n'a pas un caractère accidentel, mais est essentielle aux systèmes matériels dans lesquels le sens de la marche de l'énergie vibratoire et de l'énergie visible serait le contraire de ce qu'il est dans notre monde. Il en résulte que Philippe Breton se trompait lorsque, cherchant à réfuter par l'absurde le principe de réversibilité, il en tirait les conséquences suivantes : « Comme rien, disait-il, n'autorise à assigner des bornes quelconques à l'étendue et à la variété du monde physique, comme, d'ailleurs, toutes les combinaisons possibles de vitesses des éléments matériels à un instant donné sont également probables ; il est hautement probable, ou plutôt

Digitized by Google

il est certain qu'il existe quelque part, dans les profondeurs de l'immensité, un monde où tous les phénomènes physiques dont nous sommes témoins se passent en ordre inverse. Ce monde que vous jugez être à rebours du bon sens est simplement à rebours de vos habitudes. Là, la lumière va de l'espace céleste vers les soleils ; là, les actions chimiques, électriques, élastiques, caloriques, que nous connaissons, produisent à rebours de nos expériences, et leurs explications et leurs lois sont les mêmes que chez nous, sauf la distinction subtile des causes et des effets. »

A cela on doit répondre d'abord, avec le P. Carbonnelle et conformément à son analyse de la contre-chute d'un corps pesant, que les phénomènes renversés sont d'une probabilité si faible, grâce au nombre des combinaisons contraires des vitesses des éléments matériels, qu'on ne saurait croire à leur réalisation, quelque grande que soit l'étendue de l'univers [1]; mais on peut ajouter que, si un groupe de phénomènes de ce genre venait à se produire, son instabilité le ferait vite avorter. Reprenons, en effet, l'exemple d'un éboulis, et supposons que ses fragments se trouvent, par un bien surprenant concours des vitesses vibratoires, lancés sur la pente de la montagne; pour qu'ils puissent s'agréger et constituer un rocher à son sommet, il faudra un nouveau concours de circonstances vraiment extraordinaire, sans lequel ils redescendront la pente sous l'action de la pesanteur, lorsqu'ils auront épuisé leur force vive, et les phénomènes reprendront leur cours ordinaire, grâce à l'instabilité des systèmes révertis. On est donc en droit de conclure que, si un univers réverti n'est pas contradictoire et ne peut, dès lors, être nié *a priori*, on ne saurait lui attribuer une probabilité quelconque comme résultat fortuit des

1. Il est entendu que le nombre des atomes est forcément fini, en vertu du principe de contradiction (voir le chapitre v).

Digitized by Google

lois naturelles et qu'il ne pourrait être admis que comme le résultat d'une volonté spéciale du Créateur.

Par suite de cette possibilité absolue d'un univers matériel réverti, le P. Carbonnelle est en droit de dire que, de deux états successifs d'un système atomique, chacun peut, absolument parlant, jouer, relativement à l'autre, le rôle de cause ou le rôle d'effet; mais il n'en reste pas moins vrai que l'un des deux sens du rapport présente un caractère de vraisemblance tout à fait étranger à l'autre. Il suit de là que, si l'étude du monde matériel, considéré en lui-même et isolément, ne permet pas une distinction rigoureuse du passé et de l'avenir, elle permet, du moins, de faire cette distinction comme base d'une conception logique de ce monde.

Tout ce qui précède suppose, nous l'avons dit, que l'action réciproque de deux atomes donnés ne soit fonction que de leur distance. Or, c'est là une hypothèse au moyen de laquelle nous croyons, avec M. Boussinesq [1], qu'il est sage de chercher à expliquer tous les phénomènes, mais qui ne s'impose nullement comme un principe nécessaire. M. Poincaré n'hésite pas à la repousser très nettement, précisément en raison du principe de réversibilité qui en découle et qui lui paraît condamné par l'expérience. C'est ainsi que, si l'on met en présence un corps chaud et un corps froid, le premier cédera de la chaleur au second, et jamais le phénomène inverse ne se produira, non seulement lorsque les deux corps agiront l'un sur l'autre, mais quelque artifice que l'on emploie, quelques corps étrangers qu'on fasse intervenir. En un mot, non seulement il n'y a pas *réversibilité directe*, mais il n'y a pas même *réversibilité indirecte*.

Ce dernier point, l'absence de réversibilité indirecte, per-

1. Voir ses très intéressantes *Leçons synthétiques de mécanique générale*.

Digitized by Google

met de réfuter la réponse tirée de l'hypothèse des *mouvements cachés* de Helmholtz, d'après laquelle l'irréversibilité serait due à l'existence de mouvements inconnus, qu'on omet ou qu'on est dans l'impossibilité pratique de révertir. Tel serait le cas d'un observateur du pendule de Foucault au Panthéon qui, ignorant le mouvement de la terre, considérerait la rotation de ce pendule comme irréversible. Cette réponse, si séduisante qu'elle soit, en effet, tombe devant la démonstration que les mouvements cachés ne sauraient empêcher la réversion indirecte [1].

La même remarque permet de montrer qu'il ne suffit pas, pour faire disparaître toute difficulté, de supposer que l'action mutuelle de deux atomes est fonction de leur vitesse relative ; lord Kelvin (sir William Thomson) a, en effet, été amené à distinguer deux sortes de forces dépendant des vitesses : les unes, qu'il appelle « gyrostatiques », laissent subsister la réversibilité indirecte ; les autres suppriment la conservation de l'énergie, en même temps que cette réversibilité [2]. Ces dernières forces répondraient donc seules complètement à la question.

Enfin, M. Poincaré, parlant de Maxwell et de son démon, fait contre l'hypothèse des forces fonctions de la seule distance des atomes, une objection extrêmement grave : « Un théorème facile à établir, dit-il, nous apprend qu'un monde limité, soumis aux seules lois de la mécanique [3], repassera

1. *Revue de métaphysique et de morale*, 1893, p. 534-537.
2. Même revue, 1894, p. 197.
3. On remarquera cet emploi de l'expression « lois de la mécanique », pour désigner exclusivement des lois ne faisant dépendre les forces que de la position relative des atomes ; c'est dans ce sens étroit que M. Poincaré s'est cru fondé à déclarer le mécanisme condamné par l'expérience. Cet emploi du mot « mécanisme » est sans inconvénient, lorsqu'on a bien présent à l'esprit la définition qu'il suppose ; mais il n'est pas sans danger en ce qu'il peut induire, même des hommes tout à fait supérieurs,

Digitized by Google

toujours par un état très voisin de son état initial, » tandis que les lois expérimentales nous montrent l'univers tendant vers un état final dont il ne pourra sortir. Cette énonciation donne lieu à deux remarques : l'une concernant le théorème invoqué, et l'autre l'interprétation donnée aux lois expérimentales. Sur le premier point, nous ferons seulement remarquer que le théorème suppose certaines conditions restrictives que nous ne saurions malheureusement faire connaître avec précision, et dont nous ne pouvons par suite discuter la portée. D'autre part, on peut admettre que l'état final vers lequel paraît tendre l'univers, ne sera pas une immobilité absolue et que, après un très long repos apparent, le monde en sortira pour repasser par des états analogues aux anciens, grâce à une réversibilité indirecte. Enfin comme l'a montré M. Couturat, dans une discussion fort intéressante [1], le théorème de M. Poincaré comporte, comme cas particulier, la marche vers un état limite qui ne

conserver les conclusions sans rester bien fidèles au sens spécial qui les justifiaient. Ainsi, M. Boutroux, dans son cours sur l'*Idée de loi naturelle*, affirme l'irréductibilité de la physique à la mécanique en s'appuyant sur ce que « le caractère essentiel d'un phénomène mécanique est la réversibilité » (p. 53). Or, cet emploi restreint du mot « mécanique » lui ôte toute portée philosophique. L'hypothèse du mécanisme de l'univers consiste à admettre que tous ses états successifs sont reliés les uns aux autres par des équations mathématiques, sous réserve du rôle qu'on peut attribuer aux êtres animés. Dans l'établissement de ces équations, lesquelles définissent les actions mutuelles des points matériels, on a été amené, au moins provisoirement, à admettre l'existence de termes qui deviennent négligeables lorsque les points sont à des distances sensibles ; les formules ainsi simplifiées satisfont au principe de réversibilité, et l'on peut, sans doute, les désigner spécialement sous le nom de formules mécaniques ; mais, si l'on ne veut pas être la dupe des mots, on doit bien se rendre compte qu'il n'y a là qu'un classement commode, mais superficiel, ne pouvant donner naissance qu'à une irréductibilité purement verbale entre la physique et la mécanique.

1. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1893, p. 564.

Digitized by Google

serait atteint qu'au bout d'un temps infini. Or, la possibilité de ce cas particulier, rapprochée de l'instabilité caractérisant les systèmes à marche inverse de celle de notre univers, ne montre-t-elle pas que la réalisation dudit cas, bien loin de n'avoir qu'une chance infiniment petite de se produire, doit le faire de préférence aux autres combinaisons ?

Nous ne saurions, du reste, insister davantage, car nous nous sommes déjà un peu éloigné de notre sujet. Ce qui nous a amené à parler de la réversibilité, c'est, en effet, la difficulté ou mieux l'impossibilité qui paraît en résulter de distinguer l'avant de l'après, le passé de l'avenir. Or, nous avons vu que, même en admettant l'existence de la réversibilité directe, la seule qui donne lieu à la difficulté en question, l'enchaînement des phénomènes naturels ne présente pas le même caractère, suivant qu'on le considère dans un sens ou dans l'autre : nous n'avions pas autre chose à montrer, et, si l'expérience amène à repousser absolument cette réversibilité, cela ne fera que supprimer une difficulté. En résumé, si la notion complète du temps suppose peut-être la considération des phénomènes psychiques, on ne saurait dire sans exagération que la mécanique, même restreinte à la considération de forces fonctions des seules distances, soit impuissante à servir de base à cette notion.

Nous ne pensons pas, d'ailleurs, qu'il y ait lieu d'insister sur le caractère franchement absurde que présenterait le monde moral supposé réverti ; comme, du reste, il existe une liaison intime entre les deux ordres de phénomènes, on voit qu'on ne saurait admettre la réversion des phénomènes matériels avec le maintien des lois qui constituent ce qu'on appelle l'union de l'âme et du corps. Du moment qu'on sort de la physique pour entrer dans le domaine de la psychologie, le temps prend un caractère nettement déterminé, tenant à ce qu'il est impossible, en général, de renverser la liaison causale qui unit deux phénomènes.

Digitized by Google

CHAPITRE V

CRITIQUE DE L'INFINI ET DU CONTINU
LES ARGUMENTS DE ZÉNON D'ÉLÉE

I

CRITIQUE GÉNÉRALE

Abordant l'étude plus particulièrement philosophique de l'espace et du temps, nous pensons devoir le faire par la critique préalable de l'infini et du continu, à laquelle nous aurons bien souvent à nous référer. Sur ce point, et étant donné que nous n'avons à nous occuper que de l'infini de quantité, nous n'aurons qu'à suivre les traces des maîtres du néo-criticisme, MM. Renouvier et Pillon, dont on connaît l'inflexible fermeté dans l'application de ce qu'ils appellent le *principe du nombre*.

Un premier point, que les adversaires les plus habiles ont bien garde de nier, c'est la contradiction qu'enferme la notion d'un nombre infini : « Dans la formation des nombres abstraits par l'esprit, dit justement M. Milhaud, chacun a pour définition d'être un symbole, succédant au dernier auquel l'esprit s'est arrêté, et précédant celui qui suivra. D'après cette définition même, la création d'un nombre nouveau n'implique jamais aucune impossibilité ; il ne sau-

Digitized by Google

rait donc exister un nombre venant après tous les autres dans cette suite, un nombre plus grand que tout nombre assignable, en d'autres termes, enfin, un nombre infini. Qui dit *nombre*, dit *nombre fini*, ou plutôt ces deux mots réunis ne signifient rien de plus que le premier tout seul [1]. »

Quelque excellente que soit cette démonstration, nous en ajouterons une, telle que la donne M. Pillon, en l'empruntant à Galilée : « On sait que la série des nombres carrés est 1, 4, 9, 16, 25, etc. Si l'on suppose actuellement prolongée à l'infini la suite naturelle des nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, etc., les carrés que renferme cette suite seront en minorité, et cette minorité sera de plus en plus marquée. Ainsi, si l'on arrête la suite après le nombre 10, après le nombre 100, après le nombre 1.000, etc., le nombre des carrés qu'elle renfermera sera 3 dans le premier cas, 10 dans le second, 31 dans le troisième. Par conséquent, le rapport entre le nombre des termes carrés et le total des termes deviendra successivement 3/10, 10/100, 31/1.000, etc., d'où l'on doit conclure que, si la suite des nombres entiers pouvait être supposée actuellement prolongée à l'infini, les termes carrés y seraient en très grande minorité. Or, cette dernière condition, qui devrait être satisfaite dans l'hypothèse dont il s'agit, est pourtant incompatible avec cette même hypothèse, car, dans la suite des nombres entiers actuellement prolongée à l'infini, se trouverait, avec chaque terme non carré, le carré de ce terme, puis le carré du carré, etc. Donc, puisque l'hypothèse de la suite actuellement prolongée à l'infini entraîne des contradictions manifestes, cette hypothèse doit être rejetée [2]. »

C'est là un exemple des contradictions auxquelles conduit la supposition d'un nombre infini ; il serait superflu

1. *Essai sur les Conditions et les Limites de la Certitude logique*, p. 199.
2. *L'Année philosophique* (1re année, 1890), p. 83.

Digitized by Google

d'insister sur ce point, car, nous l'avons vu, ce n'est pas là-dessus que porte le débat susceptible d'embarrasser un esprit réellement philosophique. Le côté purement mathématique de la question étant regardé comme tranché, voyons donc comment on essaie d'esquiver les conséquences que la réponse faite paraît devoir entraîner. Sous des formes variées, plus ou moins captieuses, les arguments invoqués reposent sur la distinction scolastique de l'acte et de la puissance; nous en étudierons un exposé récent, remarquablement subtil, dû à M. Milhaud, dont nous avons reproduit tout à l'heure la déclaration catégorique sur l'absurdité du nombre infini et que nous avions déjà rencontré comme contradicteur à l'occasion de la géométrie non euclidienne [1].

Ayant reconnu que la notion de nombre infini abstrait est contradictoire, il en conclut très logiquement « qu'un nombre infini d'objets ne peut se rencontrer dans le monde concret, qu'il ne saurait exister aucun ensemble d'éléments, aucune somme de parties dont le nombre soit infini », que, par suite, « le passé n'est pas la somme d'un nombre infini d'événements », que « l'univers n'est pas un nombre infini de corps distincts ». Mais, cela posé, M. Milhaud refuse d'en conclure que le monde a commencé et que l'univers est composé d'un nombre limité d'objets.

Pour échapper à ces conclusions, si naturelles, semble-t-il, il lui suffit de nier que les années antérieures à l'instant actuel, que les corps composant l'univers constituent des collections, des nombres. Parlant des hommes qui habite-

1. Il nous semble que MM. Renouvier et Pillon devraient être frappés de ce fait que, au nom des même principes, M. Milhaud peut les combattre sur la question de l'infini et du continu et les soutenir sur celle de la géométrie générale; n'est-ce pas une vérification de ce que nous disions sur le caractère illogique de leur attitude à l'égard de cette dernière (p. 59)?

Digitized by Google

raient *n'importe où dans l'espace*, dont chacun est donné, en ce sens qu'il existe et qu'il est distinct, il nie qu'on puisse parler de leur *totalité*. Si l'on peut dire « tous les hommes », ce n'est que dans le sens de « tout homme », sans qu'il y ait aucunement idée de leur réunion en un tout, attendu que, si l'on veut dire qu'ils forment une collection, on doit ajouter que ce n'est « qu'une collection en puissance », bien que chaque élément soit en acte.

Voilà, nous semble-t-il, un bien singulier usage de la notion de la puissance. Qui dit qu'une chose est en puissance, en effet, dit qu'elle n'est pas actuellement, mais qu'elle peut devenir. Or, il s'agit ici d'une collection qui, essentiellement, ne peut venir à l'existence en acte, puisqu'elle impliquerait contradiction. Pour la pensée divine elle-même, la totalité des hommes ne saurait être envisagée ; elle connaît chacun d'eux, mais elle ne saurait les considérer comme formant un tout. Conception étrange entre toutes, qui, pour nous, n'est que l'aveu de l'impossibilité où l'on est de faire entrer dans la pensée l'idée d'une pluralité sans limite. Aussi, répéterons-nous, avec M. Renouvier : « Ou ces choses composent actuellement, toutes ensemble, un tout, ou elles ne composent pas un tout; mais, si ces choses ne composent pas un tout, il est donc des choses qui sont et qu'on ne saurait considérer, sous le simple rapport de l'existence, conjointement avec d'autres choses qui sont. Cette conséquence est incompatible avec la représentation, donc ces choses composent un tout. Or, avec un tout donné, un nombre est toujours donné. Des choses qui sont, ou des parties quelconques de ces choses, formeront toujours des nombres, c'est-à-dire des nombres déterminés, différents de tous autres nombres. Sans cela, point de représentation, ni effective, ni possible, d'un tout [1]. »

1. *Traité de Logique générale et de Logique formelle*, 2e édit., tome I, p. 46.

Digitized by Google

Tel est le principe du nombre, dont il est essentiel de se bien pénétrer, car ses conséquences choquent parfois bien durement notre imagination; c'est pour cela qu'on cherche si souvent à y échapper, soit par une franche négation, comme M. Milhaud, soit par de vains artifices. Nous connaissons ces derniers pour y avoir eu plus d'une fois recours nous-même; mais, enfin, il a fallu nous soumettre aux reproches de ce maître intérieur qui, comme disait Malebranche, nous avertit que nous faisons un mauvais usage de notre liberté.

La notion du continu soulève, au fond, la même question, mais sous une forme un peu différente. Ici, nous considérons un objet fini, une longueur ou un temps, par exemple, ayant deux limites déterminées, et, par suite, on est en présence d'un tout, d'un ensemble, que M. Milhaud ne songe point à contester. Mais la difficulté n'en subsiste pas moins : elle n'est que déplacée et va porter sur les parties de cet ensemble, qui ne sont pas données, nous dit-on. Si je coupe une règle, « je vois, il est vrai, à chaque instant, dit M. Milhaud, des morceaux séparés, nettement définis. Mais cette définition dépend du moment où je me place dans l'opération à laquelle je me livre. Choisirez-vous un instant particulier pour que la définition des parties soit précise? Vous aurez, à coup sûr, un nombre fini d'éléments, mais cela ne prouve rien sur le degré de divisibilité de ma règle. Vous ne choisirez pas un instant spécial? Mais alors la définition des parties est variable, et qu'entendez-vous quand vous dites que la règle comprend un nombre déterminé de ces choses qui ne sont pas définies? — Non, que vous en ayez conscience ou non, lorsque vous énoncez cette proposition : la règle n'est pas divisible à l'infini, parce que, se composant de parties, elle est nécessairement un nombre de parties, vous entendez sous ce mot « parties » des éléments derniers, obtenus après achèvement de la division de la

Digitized by Google

règle, et vous supposez donc implicitement qu'il y a des éléments derniers, des éléments indivisibles, vous supposez ce que vous vouliez démontrer [1]. »

Qu'on nous permette de prendre un autre exemple, qui va nous faire rencontrer une nouvelle difficulté, à laquelle il faudrait répondre ensuite, si nous ne l'unissions à celle qui précède. Nous considérerons donc un point — le centre de gravité d'un corps, si vous voulez, puisque vous n'admettez pas l'hypothèse des atomes — et nous le supposerons parcourant un segment de droite ou un arc de courbe. Ici, nous n'avons point à opérer cette division de la règle dont vous parliez : à chaque position du point considéré répond une valeur déterminée de sa distance à l'origine du mouvement, et cette valeur est réalisée par le seul fait du passage du point dans cette position, sans qu'il soit nécessaire pour cela que je la détermine. Donc, si le mouvement est continu, nous nous trouverons en présence de la réalisation d'une infinité de distances différentes [2] ; cela ramène, il est vrai, la question du continu à celle que nous avions discutée d'abord, car il faut bien reconnaître que M. Milhaud peut objecter que nous ne sommes plus ici en présence d'un tout et de ses parties. Pour nous, cette identification des deux questions nous suffit, puisque la pluralité infinie nous a paru incompatible avec la constitution même de l'intelligence [3].

1. On trouvera, dans un article de M. de Vorges (*Revue des Questions scientifiques* de janvier 1883), une très curieuse discussion contre Suarez, qui invoquait, aussi lui, le fait que les parties n'existeraient qu'en puissance, tant qu'elles ne sont pas séparées. On lira aussi avec intérêt une discussion de M. Dunan (*Essai sur les Formes « a priori » de la Sensibilité*, p. 27 à 32).

2. On remarquera que, de même, une règle continue présenterait l'existence d'une infinité de distances à chacune de ses extrémités.

3. M. Boussinesq, qui, comme mécanicien-géomètre, ne peut se

Digitized by Google

On a pu remarquer, d'ailleurs, cette conséquence singulièrement *dure* de ce qui précède, qu'il y a contradiction à admettre la réalité d'un mouvement continu, en sorte que nous devons professer qu'un point, en se déplaçant, le fait d'une manière discontinue, de façon que sa distance à un point fixe ne prenne qu'un nombre fini de valeurs. C'est là, disons-nous, une conséquence fort dure, mais dure seulement pour notre imagination, non pour notre raison, qui nous l'impose au contraire. N'avons-nous pas un exemple constant de notre tendance à voir la continuité là où elle n'est pas, alors que nous croyons instinctivement à celle de tous les corps dont nous n'apercevons pas les pores? Si nous acceptons d'être détrompés par la physique sur ce point, pourquoi n'accepterions-nous pas une leçon toute semblable de la métaphysique, quand il s'agit de reconnaître la véritable nature du mouvement?

D'autre part, la critique de l'infini nous interdit d'admettre la réalité d'une étendue infinie, et cependant, en

passer de la notion des atomes indivisibles, n'ose se prononcer sur la réalité et admet « que la nature se dérobe en partie à tous les efforts de notre faculté de représentation, ou que le fond des choses nous échappe, par suite d'un défaut d'adaptation très léger, mais peut-être irrémédiable, de notre esprit ». Il lui semble, d'ailleurs, que « le sens pratique admet parfaitement la continuité dans les mêmes choses dont il repousse la divisibilité à l'infini »; aussi accepte-t-il l'existence d' « une certaine continuité n'entraînant pas la divisibilité à l'infini » (voir son *Étude sur divers points de la Philosophie des Sciences*, p. 64 et 22, note 1). Kant lui a donné l'exemple de l'acceptation de ces antinomies.

Le P. Carbonnelle prétend sauver le mouvement continu par sa thèse du nombre infini, mais indéterminé ; pour lui, le nombre des étoiles et des atomes est fini, parce que déterminé, mais celui des positions d'un atome d'un point mobile est infini, étant indéterminé. Quel que soit le mérite de ce savant regretté, cette thèse nous paraît illogique et avoir, par suite, une moindre valeur que celle de M. Milhaud (voir *les Confins de la Science et de la Philosophie*, tome I, p. 250 à 294).

Digitized by Google

étudiant l'espace géométrique, ou plutôt les espaces géométriques, nous avons vu qu'il en est d'infinis, comme il en est de finis ; faut-il donc poser le principe d'une irréductible antinomie entre les diverses conclusions de la raison ? Telle ne saurait être notre pensée. La géométrie a pour objet de simples possibilités de relations, comme l'arithmétique étudie des possibilités de pluralités ; or, de même que la possibilité de toujours ajouter une unité à tout nombre donné n'équivaut aucunement à l'existence d'une pluralité infinie, de même l'extension toujours possible de certaines relations spatiales n'entraîne en aucune façon l'existence de relations infinies, expressions, du reste, qui jurent de se trouver accolées, ce qui est infini revêtant le caractère de l'absolu.

On sait que l'affirmation et la négation de la limitation de l'espace et du temps constituent la première des antinomies de Kant ; lui-même semble pourtant avoir bien réfuté l'antithèse qui nie la limitation. Cette antithèse s'appuie sur ce que, si le monde a commencé, il a été précédé d'un temps vide, et que, de même, s'il est limité quant à l'espace, il le serait par un espace vide. Or, l'espace, dit-il, n'est « pas un objet réel qui puisse être perçu extérieurement, ni rien de corrélatif aux phénomènes, mais la forme même des phénomènes. L'espace ne peut donc absolument (par lui-même) précéder comme quelque chose de déterminant dans l'existence des choses, parce qu'il n'est pas un objet, mais seulement la forme des objets possibles. Par conséquent, les choses, comme phénomènes, déterminent bien l'espace ; c'est-à-dire que de tous ses prédicats possibles (grandeur et rapports), elles font que ceux-ci ou ceux-là appartiennent à la réalité. Mais l'espace ne peut pas réciproquement, comme quelque chose qui existe par soi, déterminer la réalité des choses par rapport à la grandeur ou à la figure, puisqu'en soi il n'est rien de réel. C'est pourquoi un espace, qu'il soit plein

Digitized by Google

ou vide [1], peut bien être borné par des phénomènes, mais des phénomènes ne peuvent pas être *bornés par un espace vide en dehors d'eux*. Il en est de même du temps [2]. »

La réfutation de l'antithèse paraît ainsi péremptoire ; mais Kant ajoute, sans que nous concevions comment il peut le faire : « Il est néanmoins incontestable, malgré tout cela, que l'on doit nécessairement admettre ces deux non-êtres, savoir : un espace vide hors du monde, et un temps vide avant le monde, si l'on suppose un terme au monde quant à l'espace et quant au temps. » Il fallait qu'il eût vraiment la passion des antinomies.

Tenant pour excellente sa propre réfutation de son antithèse, et achevant de faire au temps l'application de l'anathème prononcé contre l'infini de quantité et le continu, nous dirons qu'un temps infini entraîne contradiction, c'est-à-dire que le temps a commencé, et, d'autre part, qu'une durée n'est pas continue, c'est-à-dire ne comprend pas une infinité d'instants réels ; ce dernier point, plus que tout autre, est de nature à révolter le sens commun ; mais nous ne devons pas moins l'affirmer énergiquement. Si, plus tard, nous pouvons donner une théorie de la nature du temps qui explique ce caractère si remarquable, cela procurera évidemment une intime satisfaction à notre esprit ; mais, pour nous incliner devant une exigence de la raison, nous ne devons pas attendre d'avoir trouvé la solution d'objections qui n'ont d'autre fondement que des préjugés reposant sur notre sensibilité et notre imagination.

Cela bien posé, nous devons nous demander si le caractère de divisibilité à l'infini, sous lequel nous apparaissent l'espace et le temps, est purement illusoire. Nul mieux que

1. Kant fait remarquer en note qu'il s'agit ici d'un espace vide limité par des phénomènes et situé par conséquent en dedans du monde.

2. *Critique de la Raison pure*, traduction Tissot, t. II, p. 29 et 30.

Digitized by Google

Boscovich n'a élucidé cette question, ainsi qu'on peut le voir par le passage suivant, où sont posés et le nombre fini des éléments, et la divisibilité à l'infini pour les intervalles : « Chaque intervalle, dit-il, sera certes divisible à l'infini par l'interposition d'autres points matériels, puis d'autres encore, et ainsi de suite, lesquels pourtant, une fois posés, seront de même en nombre fini et laisseront de la place pour bien d'autres ; et ceux-ci, quand ils existeront, formeront, eux aussi, un nombre fini ; de sorte que l'infini sera uniquement dans les possibles, mais non dans les existants (*ut infinitum sit tantummodo in possibilibus, non autem in existentibus*) [1]. » L'espace, en un mot, n'est qu'une possibilité de relations, et ces relations peuvent avoir des valeurs absolument quelconques ; c'est là ce qu'exprime sa divisibilité à l'infini ; mais le nombre des éléments entre lesquels existent ces relations est essentiellement fini, et, de plus, devons-nous ajouter, si les relations de deux points viennent à changer, c'est-à-dire s'ils se déplacent l'un par rapport à l'autre, il y aurait contradiction à ce que ce changement se produisît d'une façon continue, de telle sorte que la distance de ces deux éléments eût pris une infinité de valeurs distinctes. Nous devons ajouter que ce développement légitime de la théorie de Boscovich n'a pas été vu par lui, car il professe formellement l'existence de la loi de continuité, en vertu de laquelle toute grandeur variable passe par tous les degrés

1. *Théorie de la Philosophie naturelle réduite à l'unique loi des Forces existantes dans la nature*, 1re partie, n° 89. On sait que Kant, dans l'antithèse de sa seconde antinomie, a reproché aux monadistes de ne pas tenir compte des propriétés mathématiques de l'espace et d'admettre « des points physiques qui, à la vérité, seraient simples, mais qui auraient le privilège, comme parties de l'espace, de remplir l'espace par leur seule aggrégation ». Assurément, la thèse de Boscovich échappe complètement à cette critique.

Digitized by Google

intermédiaires [1] : s'il repousse le continu coexistant, il admet le continu successif, et encore éprouve-t-il quelque doute à l'égard du premier [2].

Il résulte de là que le temps, essentiellement successif, ne saurait être mis par Boscovich tout à fait sur le même pied que l'espace. Pour nous, au contraire, il ne saurait y avoir de différence, et nous appliquerons exactement au temps sa conception de ce qu'il appelle le continu physique de l'espace, par opposition au véritable continu, ou continu mathématique.

Cette conception aurait dû, semble-t-il, séduire un des penseurs les plus profonds de notre temps, qui, d'ailleurs, a plus que tout autre approfondi la pensée de Boscovich, M. Évellin; mais, au lieu de se contenter de cette pensée, à la fois si simple et si rationnelle, il en a présenté une autre qui, pour ingénieuse qu'elle soit, nous paraît bien loin de satisfaire l'esprit.

La pensée fondamentale de ce philosophe est nettement exposée dans une étude publiée par la *Revue de Métaphysique et de Morale* [3]. Pour lui, la limitation du nombre des parties s'applique non seulement aux grandeurs réelles, mais encore aux grandeurs purement idéales, attendu qu'avant même que l'entendement les désigne, ces parties existent, et que leur nombre est entièrement déterminé par

1. *Continuitatis lex... in eo sita est... ut quævis quantitas, dum ab una magnitudine ad aliam migrat, debeat transire per omnes intermedias ejusdem generis magnitudines* (*idem*, n° 32; voir les développements, n°s 32 à 62).

2. *Ego quidem continuum mullum agnosco coexistens* (*idem*, n° 141). *Quoniam autem possunt omnia existere alia post alia puncta loci in quavis linea constituta, in motu nimirum continuo, et possunt itidem momenta omnia temporis continui, alia itidem post alia in rei cujusvis duratione; ambigi poterit an possint et omnia simul ipsa loci puncta quam quæstionem definire non ausim* (Suppl. *de Spatio ac Tempore*).

3. *La Divisibilité dans la grandeur*, 1894.

Digitized by Google

la grandeur telle ou telle qui les contient. Comme preuve, il cite le mouvement : « La ligne, dit-il, doit être telle, intrinsèquement et par essence, qu'une fois posée elle se prête au mouvement ; si elle le rend impossible, elle devient elle-même inconcevable. Or, pour se prêter au mouvement, il faut qu'elle ait des parties, autrement le mobile ne saura où se poser. Il en résulte que les parties que le mouvement suppose appartiennent à sa nature et sont antérieures à toute opération de l'esprit. » De là cette conclusion : « Le mouvement épuise la ligne ; donc il épuise ses parties ; donc ses parties ont un nombre. Ce nombre nous échappe, mais il faut que dans la réalité il soit donné. »

Cette thèse, disons-le bien haut, a une rare valeur logique, et ne saurait tomber sous le principe de contradiction ; mais nous croyons que M. Évellin a tort de refuser le même mérite à la thèse de Boscovich, complétée comme dans l'exposé que nous en avons donné, au point de vue du mouvement qui ne saurait épuiser toutes relations possibles sur la ligne parcourue. Égales à ce point de vue, ces deux thèses nous paraissent bien différentes à celui des difficultés qu'elles soulèvent à l'égard de la nature de l'espace et du temps. M. Évellin est, en effet, amené forcément à enseigner qu'il existe un *lieu en soi*, ou *lieu réel*, composé d'éléments indivisibles et inétendus, ainsi qu'un *temps en soi*, ou *temps réel*, formé d'instants absolus, affranchis de la durée : telle est la doctrine développée dans sa célèbre thèse *Infini et Quantité*[1]. Or, il nous semble qu'elle heurte dans ce qu'il peut avoir de légitime le préjugé si répandu « qui nous porte à croire que tout composé est formé d'éléments qui lui ressemblent ». Assurément ce préjugé est ridicule quand il inspire la pensée qu'un composé ne saurait être formé d'éléments simples, puisque le groupement de tels éléments produit forcément

1. P. 70 à 82.

Digitized by Google

un composé, et, de même, il y a une étrange aberration à ne pas voir qu'une multiplicité d'éléments simples peut engendrer des relations étrangères à un élément isolé.

Mais n'y a-t-il pas, au contraire, quelque chose de surprenant à ce qu'une *grandeur en soi* soit formée d'éléments irréductibles en nombre fini, dont la nature ne ressemble en rien au résultat de leur addition, bien qu'on leur attribue un minimum de grandeur portant la même qualification? Des longueurs qui ne se divisent plus en longueurs, des durées qui ne se divisent plus en durées, selon les expressions mêmes de M. Évellin [1], nous apparaissent comme privées d'un des attributs essentiels de la longueur et de la durée et comme des choses en soi complètement inconnaissables. D'autre part, M. Pillon, après avoir montré que M. Évellin n'a fait que reproduire, sur une base nouvelle, une théorie de Hume, leur oppose à tous deux une argumentation de Pascal. « Les indivisibles qui composent un lieu réel doivent se toucher, sans quoi ils seraient séparés par des intervalles où il n'y aurait pas d'indivisibles. Or, deux indivisibles ne peuvent se toucher qu'en tout ou en partie : s'ils se touchent en tout, ils coïncident, et, s'ils coïncident, ils ne font qu'un ; s'ils ne se touchent qu'en partie, ils ne sont donc pas indivisibles [2]. » Quoi qu'il en soit, nous devons protester contre l'assertion de M. Évellin que *le* partisan des indivisibles formule l'affirmation de longueurs et de durées telles qu'il les conçoit, car on peut être partisan non moins résolu que lui des indivisibles et ne rien affirmer de tel, l'affirmation des atomes indivisibles pouvant être séparée de celles de durées et de longueurs indivisibles et la négation de ces dernières n'entraînant pas la réalité de quantités continues. Enfin, il nous

1. *Le Mouvement et les partisans des indivisibles* dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* de 1893, p. 384.
2. *L'Année philosophique* (2e année), p. 206.

Digitized by Google

semble qu'on ne doit pas, sans nécessité, refuser à l'espace ou au temps le caractère de relativité qu'ils possèdent si complètement au point de vue scientifique.

II

LES ARGUMENTS DE ZÉNON D'ÉLÉE

Nous ne croyons pas qu'un seul philosophe ayant étudié les questions qui précèdent se soit abstenu d'éprouver la valeur de ses principes en les appliquant à la discussion des fameux arguments de Zénon d'Élée sur le mouvement. Ce seul fait suffirait à montrer combien superficielle et puérile est la critique qui ne voit dans ces arguments que des sophismes indignes d'arrêter les gens sérieux. Convaincu que l'étude de ces arguments est éminemment propre à faire ressortir la portée des diverses théories sur l'infini et le continu, nous allons la reprendre à notre tour.

Le premier, M. Renouvier a montré que ces quatre arguments se répartissent en deux groupes distincts, comprenant : l'un, la *dichotomie* et l'*Achille* ; l'autre, la *flèche* et le *stade*, et répondant : le premier, à l'hypothèse du temps et de l'espace continus et divisibles à l'infini d'une façon actuelle ; le second, à celle du temps et de l'espace discontinus et non susceptibles d'une division actuelle infinie. Dans l'exposition que nous allons faire et la discussion à laquelle nous allons nous livrer, nous aurons souvent recours à un article de M. Noël, dont les conclusions s'éloignent singulièrement des nôtres, mais qui ne nous paraît pas moins avoir une valeur exceptionnelle [1].

1. *Revue de Métaphysique et de Morale* de 1893.

Digitized by Google

Aristote formule ainsi l'argument de la dichotomie; « Il n'y a pas de mouvement, car il faut que le mobile atteigne le milieu de son parcours avant d'atteindre la fin. » Ce qui se dit du parcours total se dira aussi du parcours de la moitié, et ainsi de suite à l'infini. D'autre part, l'*Achille* se résume ainsi : « Le plus lent ne sera jamais atteint par le plus rapide, car il faut auparavant que celui qui poursuit soit parvenu au point d'où est parti celui qui fuit, de sorte que le plus lent aura toujours nécessairement quelque avance. »

M. Noël prétend établir une différence notable entre les significations de ces deux arguments : le premier tendrait à établir que le mouvement est impossible parce qu'il ne peut commencer, tout déplacement en supposant un précédent ; mais il laisserait subsister la possibilité d'un mouvement universel et éternel. Or, c'est précisément cette dernière hypothèse que réfuterait l'*Achille*, en montrant qu'un terme futur reculerait indéfiniment aussi lui.

Telle n'est pas tout à fait notre manière de voir, car, à nos yeux, la dichotomie vaut tout aussi bien pour l'avenir que pour le passé : si elle prouve que le mouvement ne peut commencer, c'est en montrant que tout élément d'un mouvement est impossible, et non pas du tout que le premier seul le serait.

S'il en est ainsi, l'*Achille* est dépourvu d'intérêt, car il n'est qu'une répétition embrouillée de l'argument fondé sur la dichotomie. On sait qu'Aristote objectait à l'*Achille* qu'on doit tenir compte de la division du temps, qui suit indéfiniment celle de l'espace [1], et que Leibniz s'est approprié cet argument [2], convaincant aussi aux yeux de Stuart Mill [3]. Mais M. Renouvier fait très justement remarquer qu'Aristote s'est réfuté lui-même d'une façon décisive : « Si quel-

1. *Physique*, VI, 1.
2. *Lettres*, Dutens, I, 238.
3. *Philosophie de Hamilton*, p. 522.

Digitized by Google

qu'un, dit-il, laisse là et la ligne parcourue et la question de traverser des infinis dans un temps fini, et porte la difficulté sur le temps lui-même, qui admet des divisions infinies, la solution ne vaut pas [1]. » La réponse est topique; mais alors nous retombons sur la même contradiction que dans l'exemple simple de la dichotomie, comme l'avait bien vu Aristote, qui ne trouvait dans l'*Achille* qu'une forme « plus pompeuse et plus tragique [2] » du premier argument; le second ne vaut donc précisément qu'en proportion de la valeur du premier. C'est là, suivant nous, ce qui permet d'écarter l'*Achille* de la discussion, et nous ne pensons pas qu'on doive beaucoup s'arrêter aux prétendues réfutations mathématiques qu'on en a données. Quand, par exemple, M. Frontera reproche à Zénon d'avoir envisagé deux séries convergentes, alors qu'il s'agit de deux séries divergentes [3], il nous paraît passer à côté de la question, qui est la critique de l'infini. Ajoutons que M. Frontera a bien vu que la *dichotomie* dépasse et rend l'*Achille* inutile; mais il se trompe, croyons-nous, en lui subordonnant également le *stade* et la *flèche*, qui visent une tout autre théorie [4].

Revenons donc à la *dichotomie*, sur laquelle repose l'argument essentiel. Aristote s'est efforcé de la réfuter au moyen de la distinction entre l'acte et la puissance, en montrant que le mouvement en acte n'opère point une division également en acte : « Quand, dit-il, on divise une ligne en

1. *Physique*, VIII, 12.
2. Livre VI, chap. XIX, § 5.
3. *Le Problème d'Achille*, dans la *Revue philosophique* de mars 1892.
4. Nous devons signaler le fait que M. Dunan a donné de l'*Achille* une interprétation toute différente de celle qu'on en donne habituellement, admettant que le temps y est pris comme composé d'instants en nombre fini, et que cet argument présente en conséquence des rapports étroits avec celui du *stade* (*les Arguments de Zénon d'Élée contre le mouvement*, Alcan, 1884).

Digitized by Google

deux moitiés, il y a un point qui compte pour deux et qui est employé à la fois comme commencement et comme fin. Or, c'est là ce que l'on fait, soit que l'on compte numériquement, soit que l'on divise la ligne en moitiés. Mais, par cette division, la ligne cesse d'être continue, aussi bien que le mouvement, car il n'y a de mouvement continu que pour un continu. Or, dans le continu, il y a bien des moitiés en nombre infini, si l'on veut; mais ce n'est pas en réalité; ce n'est qu'en puissance. Que si l'on veut les rendre réelles et les faire passer en acte, on ne produit plus un mouvement continu, on s'arrête [1]. »

Cette solution ne nous semble pas très satisfaisante. Si nous supposons, en effet, qu'un point réel parcourt un segment de ligne, nous sommes en présence d'un mouvement en acte, et, lorsque ce point passe au milieu de la ligne, la division de celle-ci est un fait actuel; il en est de même pour toute autre position du point, et, par suite, si son mouvement est continu, on est obligé d'admettre un nombre infini de divisions *en acte* du segment considéré. Ceci suppose, bien entendu, qu'il s'agisse d'un mouvement réel, car, s'il ne s'agit que d'un mouvement donné comme représentation, tel qu'un mouvement géométrique, chaque division n'existe en acte que par le fait de sa représentation; celle-ci exige précisément l'arrêt dont parle Aristote, et il ne peut en être réalisé qu'un nombre fini. Il faut donc ou refuser au mouvement toute réalité objective, c'est-à-dire adopter la thèse idéaliste, ou reconnaître que le mouvement est essentiellement discontinu.

M. Noël, il est vrai, apercevant pourtant bien, semble-t-il, le point faible du recours à la distinction de l'acte et de la puissance, tel que l'a compris Aristote, a cru pouvoir lui

1. *Physique*, liv. VIII, chap. XII, traduction Barthélemy Saint-Hilaire.

Digitized by Google

donner une forme plus satisfaisante. Sa pensée est subtile et veut être rapportée dans les termes mêmes dont il s'est servi : « Il semble, dit-il, qu'une quantité ne puisse être donnée que de deux manières : ou tout entière à la fois, ou par fractions successives. Pour le mouvement, comme pour le temps, la première supposition est évidemment insoutenable, et Zénon démontre qu'on ne saurait admettre la seconde. Mais est-il bien vrai qu'on n'en puisse concevoir une troisième ? Un examen attentif des deux hypothèses opposées, au-delà de leur contradiction apparente, nous révèle leur foncière identité. En effet, les parties que nous réunissons pour former un tout sont, prises en soi, des quantités achevées au même titre que ce tout. Ainsi les deux suppositions que nous avons distinguées enveloppent une affirmation commune. En les posant comme seules concevables, on affirme que la quantité nous est nécessairement donnée toute faite, toujours en acte, et jamais en puissance. On s'interdit d'appliquer aux grandeurs la catégorie du devenir. On écarte d'avance la notion d'une quantité qui se fait, qui n'est donnée, à proprement parler, ni dans sa totalité ni par parties successives, mais seulement dans sa loi de formation et, pour ainsi dire, en germe; qui se produit devant nous par un processus ininterrompu. Or, l'espace que parcourt un mobile et le temps qu'il met à le parcourir sont précisément des quantités de cette nature, et le mouvement n'est autre chose que le devenir de ces quantités. Ainsi les raisonnements de Zénon se fondent, en dernière analyse, sur un postulat non exprimé, et ce postulat contient lui-même la négation implicite du mouvement. »

Nous avouons ne pouvoir saisir avec clarté la pensée de M. Noël. Sans doute, un mouvement peut être donné dans sa loi de formation, et c'est ce qui a lieu si l'on donne son équation ; mais, quand il s'agit du mobile lui-même et de

Digitized by Google

ses positions successives, nous ne voyons pas comment ces positions ne constituent pas des faits en acte au moment où chacune d'elles est réalisée. Nous ne pouvons donc voir dans son argumentation qu'une tentative subtile, mais vaine, pour se soustraire aux conséquences de la critique du continu. S'il en est réellement ainsi, il faut nier la continuité des phénomènes spatiaux et temporels; mais alors on se heurte aux arguments de la *flèche* et du *stade*, qu'il nous reste à étudier.

« Si toute chose est en repos ou en mouvement dans un espace égal à elle-même, et si le mobile est toujours dans l'instant, la flèche qui vole est immobile. » Tel est l'argument que M. Noël traduit plus clairement en ces termes : « Le mobile, qu'il soit en repos ou en mouvement, est toujours dans un espace égal à lui-même ; d'ailleurs, il occupe cet espace au moins un instant, c'est-à-dire un temps fini. Il est dans un espace égal à lui-même pendant un temps fini; donc, par définition, il est en repos. » Bayle avait fort bien vu que cet argument vise les adversaires de la division à l'infini, et, après avoir déclaré que ceux qui admettent cette division du temps « doivent être abandonnés ou à leur stupidité, ou à leur mauvaise foi, ou à la force insurmontable de leurs préjugés [1] », il confesse qu'on est contraint d'admettre l'opinion de Zénon : cela n'est pas prouvé.

En face de l'argument de la flèche, la thèse de M. Évellin

1. Bayle démontrait ainsi l'indivisibilité de l'instant présent : « Il n'y a aucune partie du temps, quelle qu'elle soit, qui puisse coexister à une autre; chacune doit exister seule; chacune doit commencer d'être, avant que la suivante commence d'être. D'où il s'ensuit que le temps n'est pas divisible à l'infini, et que la durée successive des choses est composée de moments proprement dits, dont chacun est simple et indivisible, parfaitement distinct du passé et du futur et ne contient que le temps présent » (*Dictionnaire*, article *Zénon*).

Digitized by Google

et la nôtre sont à peu près dans la même situation. Pour lui, une étendue quelconque est formée de la juxtaposition d'un nombre fini d'étendues minimum, et un élément matériel les occupe successivement dans son mouvement. Un mobile est à chaque instant dans un espace égal à lui-même; mais il est en repos ou en mouvement, selon qu'il a ou qu'il n'a pas été précédemment dans le même espace ; c'est précisément la définition du repos et du mouvement. Pour nous, qui n'admettons pas le minimum d'espace, mais qui croyons à la discontinuité des positions occupées par un point mobile, nous adoptons la même définition du repos et du mouvement.

C'est là que M. Noël dirige une attaque fort intéressante. C'est, dit-il, « une définition *ab effectu*. L'existence d'un corps dans des lieux différents, en des temps différents, est un effet du mouvement et non le mouvement lui-même. Celui-ci, considéré en soi, est indéfinissable comme l'espace, le temps ou la quantité. Certes, il est permis de définir le mouvement par le déplacement qui en est le résultat et le signe sensible, mais à la condition de ne pas identifier ces deux termes. Le mouvement n'est pas une succession de positions, c'est un devenir, un passage continu d'une position à une autre, et, comme tout devenir, il n'est possible que dans le temps. Il n'y a pas de contradiction à ce qu'un même point matériel occupe en deux instants consécutifs deux points contigus de l'espace. Non, sans doute, puisque, par hypothèse, les deux instants sont distincts ; mais, pour la même raison, il n'y aurait pas plus de contradiction à ce que, en ces deux instants, le point considéré fût tour à tour sur la terre et dans la lune. Cela n'est pas contradictoire en soi. Soutiendra-t-on que c'est possible ? »

Cette dernière partie de l'argumentation paraît assez faible, car, si assurément, dans notre univers, tel qu'il est constitué et soumis aux lois que nous connaissons, un point

Digitized by Google

matériel ne peut passer sans intermédiaires de la terre à la lune, nul n'a le droit d'affirmer que cette hypothèse vise un fait impossible en soi. Quant au passage discontinu d'un point à un point si voisin que nous ne puissions vérifier la discontinuité du mouvement, on doit se demander quelles raisons militent pour ou contre. Or, il faut reconnaître que M. Noël fait valoir avec une réelle puissance le fait que le mouvement nous apparaît comme un *état* du mobile, c'est-à-dire « une dénomination intrinsèque qui doit convenir à l'objet, en quelque lieu qu'il soit, et quelque relation qu'il soutienne avec les autres objets. »

Telle est bien, en effet, l'idée que nous sommes portés à nous faire du mouvement, et il est bien difficile de ne pas éprouver quelque répugnance à ne pas voir, dans la force vive d'un corps, une propriété qui lui appartient en propre à l'instant considéré. Mais, d'une part, cet argument, si séduisant qu'il soit, se heurte à la contradiction du mouvement continu, et, d'autre part, il suppose la négation de la relativité du mouvement. C'est là une question que nous avons traitée avec l'ampleur qu'elle méritait (p. 83). Toutes les fois qu'elle se représente, elle cause un certain embarras ; mais, pour le dissiper, il suffit de se rappeler la réponse qu'on doit constamment opposer à ceux qui objectent, contre cette relativité, les lois mécaniques dépendant du système de coordonnées et du mouvement-unité qui sert à la mesure du mouvement : l'existence d'un système de coordonnées et d'un mouvement-unité jouissant du privilège de se prêter seuls à la vérification de ces lois permet aux partisans de l'espace et du temps absolus de dire qu'ils ont déterminé le premier et trouvé la mesure du second ; mais on ne saurait y voir la preuve du caractère absolu de l'espace et du temps, car si les phénomènes du monde matériel sont soumis à des lois simples, ces lois sont forcément dépendantes du choix des coordonnées et du mouvement-

Digitized by Google

unité, que l'espace et le temps soient absolus ou non. Dès lors, le fait qu'on découvre des systèmes jouissant du privilège en question n'engendre pas le moindre préjugé en faveur de l'une ou de l'autre hypothèse. L'argument de M. Noël ne constitue donc, en réalité, qu'un de ces retours offensifs des partisans du mouvement absolu, capables de surprendre et d'ébranler celui qui n'a pas présentes à l'esprit les réponses qu'on peut toujours leur opposer, mais n'introduisant aucun élément nouveau dans les questions agitées.

L'argument du *stade* est formulé par Aristote d'une façon si peu claire [1] que l'on n'a cessé d'en donner des traductions libres. Nous reproduirons celle de M. Noël, qui en fait bien ressortir toute la profondeur. « Concevons trois lignes droites horizontales, formées de points contigus et disposées

1. Voici la traduction de M. Barthélemy Saint-Hilaire : « Quant au quatrième (raisonnement), il s'applique à des masses égales qu'on suppose se mouvoir également, par exemple dans le stade, mais en sens contraire, les unes partant de l'extrémité du stade et les autres du milieu; et l'on prétend démontrer que le temps qui n'est que la moitié est l'égal du temps qui est le double... Soient, par exemple, les masses (ὄγκοι) en repos représentées par AAAA. Soient, d'autre part, BBBB, les masses égales en nombre et en grandeur aux A, mais qui partent du milieu de la longueur des A ; soient, enfin, CCCC, les masses égales aux autres en nombre, en grandeur, et égales aux B en vitesse, mais qui partent de l'extrémité. Le premier B est bien, en effet, au bout en même temps que le premier C, puisque le premier mouvement des uns et des autres est parallèle. Les C ont bien aussi dépassé tous les A; mais les B ne sont qu'à la moitié. Donc, suivant Zénon, le temps n'est aussi que la moitié, puisque, de part et d'autre, c'est parfaitement égal. Mais il arrive que les B ont, en même temps, dépassé tous les C, car le premier C et le premier B sont, en même temps, aux extrémités contraires, le temps pour chacun des B étant tout à fait égal à ce qu'il est pour passer chacun des A, si l'on en croit ce que dit Zénon, parce que tous deux arrivent dans un même temps à dépasser les A» (*Physique*, liv. VI, chap. XIV, § 9 et 11).

Digitized by Google

de façon que leurs points de même rang se trouvent situés sur une même verticale. Supposons que la première reste immobile, tandis que les deux autres se meuvent en sens contraire, de telle sorte que chacun de leurs points s'avance d'un rang d'un instant à l'autre, ce qui est, dans l'hypothèse (de M. Évellin), la plus grande vitesse concevable. Dans un instant, un point déterminé de la troisième passera sous un point unique de la première, mais il passera nécessairement sous deux points différents de la seconde. Comme, d'ailleurs, ces deux rencontres sont nécessairement successives, l'instant, indivisible par hypothèse, se trouve divisé. »

M. Évellin a bien compris que toute la force de sa défense devait porter avant tout sur ce point ; car, comme il le dit lui-même, cet argument du stade est radical, et, s'il est fondé, son hypothèse se détruit en se posant. Sa réponse est d'ailleurs si subtile que nous la reproduisons textuellement. On remarquera qu'il commence par développer l'objection.

Soient « trois lignes droites horizontales, formées d'éléments contigus :

$$\begin{array}{lll} a, & b, & c, \\ a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c''. \end{array}$$

« Ces droites sont disposées de telle sorte que leurs éléments de même rang se trouvent sur une même verticale.

« Supposons maintenant que la première demeure immobile, tandis que les deux autres se meuvent en sens contraire. Chacun de leurs éléments avancera d'un rang en un élément de durée ou instant. Or, voici ce qui va se passer.

« En un instant, un élément déterminé de la troisième, le premier, par exemple, qui est a'', passera sous un élément unique de la première et viendra se placer ainsi :

Digitized by Google

$$\begin{array}{ccc} a, & b, & c, \\ " & " & " \\ & a'' & \end{array}$$

« Mais il passera nécessairement sous deux éléments différents de la seconde :

$$\begin{array}{cccc} & a, & b, & c, \\ a', & b', & c', & \\ & & a''. & \end{array}$$

« Comme d'ailleurs, ainsi qu'on le fait remarquer, ces deux rencontres sont naturellement *successives*, l'instant, indivisible par hypothèse, se trouve divisé en deux instants.

« Suivons pas à pas cette argumentation, et ne perdons pas de vue la donnée où l'on se place.

« Qu'en une durée indivisible un élément déterminé de la troisième ligne, a'' par exemple, passe sous un élément unique de la première, rien de plus évident, c'est l'hypothèse même. Ajoutons, pour n'en pas sortir, qu'il s'y trouve au moment où il y passe. D'un élément, en effet, à l'élément contigu, l'intervalle manque. Si donc on veut ici séparer le progrès du but, si l'on imagine un mouvement avant l'arrivée, on oublie l'hypothèse, et l'on revient, sans le savoir, sur la concession que l'on a faite.

« Faut-il admettre, à présent, que a'' passe sous b' et sous c'? Occupons-nous d'abord de b'. Pour passer sous b', il faut qu'il se trouve, à un moment donné, vis-à-vis de lui. Mais où rencontrer ce moment? En un instant unique, b' est venu occuper, de droite à gauche, un lieu contigu au sien, tandis que, de son côté, a'' est venu occuper, de gauche à droite, un lieu situé au-dessous de celui qu'occupait b' :

$$\begin{array}{cc} b' & " \\ " & a'' \end{array}$$

Digitized by Google

« Si, en cet instant même, ils sont déjà arrivés, comment auraient-ils trouvé le temps de passer l'un devant l'autre?

« On insistera. Visiblement a'' et b' se croisent. — On se croise dans le continu de l'espace ; ici, c'est l'impossible. Où voulez-vous qu'ait lieu ce prétendu croisement? a'' avance d'un rang; je le vois alors, et tout de suite, au-dessous du lieu occupé à l'origine par b', mais ce lieu est vide, b' est parti. A son tour, b' avance d'un rang en sens inverse. Le voilà d'un coup au-dessus du point de départ de a'', mais a' a marché, il n'est plus là.

« Quand on parle de croisement, on raisonne comme s'il existait entre b' et a'' une verticale sur laquelle pussent passer en même temps les deux mobiles :

« C'est le contraire de l'hypothèse ; mais la figure elle-même trompe l'œil ; l'imagination voit un intervalle là où il est justement impossible ; elle est dupe, l'hypothèse est oubliée.

« En définitive, a'' ne rencontre que c', et les deux moments qu'on oppose aux partisans des indivisibles sont imaginaires [1]. »

La réponse nous paraît péremptoire : elle ne fait, sans doute, que mieux ressortir ce que l'hypothèse de M. Évellin a d'étrange, mais elle dissipe l'apparence de contradiction si ingénieusement présentée dans la traduction donnée par M. Noël de l'argument du *stade*.

Est-il besoin d'ajouter que cet argument ne saurait aucu-

1. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1893, p. 385. *Le Mouvement et les partisans des indivisibles.*

Digitized by Google

nement atteindre notre conception de l'espace et du temps ? Si, pour nous, l'atome est un indivisible, ce n'est point un minimum d'étendue, mais il est dépourvu de ce caractère, l'étendue étant, non une propriété des atomes, mais une relation entre eux. Quant au temps, c'est une autre relation entre des faits, actes ou existences, et, s'il n'est point continu, il ne présente pas, pour cela, un minimum nécessaire, ainsi que nous l'avons exposé.

En résumé, les arguments de la *dichotomie* et de l'*Achille* mettent en lumière la contradiction du continu ; la *flèche*, bien que faisant ressortir ce qu'il y a d'embarrassant dans une théorie qui refuse au mouvement le caractère d'un état propre au mobile, n'ajoute rien à cette difficulté, qui n'aboutit à aucune contradiction, et à laquelle on peut répondre de façon satisfaisante ; enfin, le *stade*, après avoir paru convaincre de contradiction la thèse assez déconcertante de M. Évellin, est réfuté par ce philosophe d'une façon qui paraît définitive. Quant à la conception à laquelle nous nous sommes arrêté, elle ne prête le flanc qu'à la discussion soulevée par la *flèche*, comme nous venons de le rappeler, et elle est bien loin de succomber dans la lutte.

Digitized by Google

CHAPITRE VI

LA NATURE DU TEMPS

Dans ce qui précède, l'espace et le temps nous sont apparus comme des relations susceptibles de mesure, sous des réserves fort graves du reste, et doués du caractère de la continuité, en ce sens que toute étendue ou toute durée peut être conçue comme divisée, mais non en tant que cette expression signifierait qu'étendue et durée varieraient en fait d'une façon continue. Pour achever l'étude que nous avons entreprise, nous devrions déterminer la nature de ces deux ordres de relations, problème que Leibniz nous paraît avoir simplement esquissé lorsqu'il a dit que l'espace est *un ordre des coexistences*, comme le temps est *un ordre des successions*[1] ; peut-être serait-il plus exact de dire que, par ces paroles, il a simplement voulu affirmer le caractère purement relatif de l'un et de l'autre, sans prétendre rien indiquer sur la nature de ces deux ordres. Il serait, en effet, puéril d'expliquer le temps par l'idée de succession, et, d'autre part, il peut exister bien des ordres de relations entre des coexistences ; cette dernière formule semble, d'ailleurs, avoir l'inconvénient de subordonner, en appa-

1. Voir, par exemple, sa troisième lettre à Clarke.

Digitized by Google

rence au moins, l'idée des relations spatiales à celle des relations temporelles.

Nous verrons tout à l'heure qu'il semble possible de soulever le voile qui couvre le mystère de ces dernières relations ; mais, pour les relations spatiales, nous n'avons ni trouvé dans les écrits des philosophes, ni pu découvrir quelque hypothèse satisfaisante sur leur nature intime. Ce n'est pas que Boscovich n'ait su poser sur ce point quelques principes de haut intérêt ; mais nous ne saurions voir qu'une pierre d'attente dans ce qu'il a dit à ce sujet. M. de Vorges a su bien faire ressortir le sens profond des aperçus contenus dans sa *Théorie de la Philosophie naturelle*, et nous ne saurions mieux faire que de lui emprunter le passage suivant[1] :

« Boscovich dit au début que ses points sont placés dans le vide. Mais ceci n'est qu'une concession à l'imagination et au langage vulgaire. Dès qu'il s'agit de serrer de près la question : *qu'est-ce qu'une distance ?* il s'exprime tout autrement. — Il déclare expressément que les distances ne sont point des vides interposés, le vide n'étant rien, mais des modes réels d'existence produisant des relations réelles; que la variété des distances n'est pas autre chose que la variété de ces modes, que ces modes sont indivisibles, inétendus, immuables dans leur ordre[2]. » Ces dernières expres-

1. *La Notion de l'Étendue et ses Causes objectives* (extrait de la *Revue des Questions scientifiques*, janvier 1883), p. 36.

2. « Spatium constat per me non solis punctis, sed punctis habentibus relationes distantiarum ad se invincem : eærelationes in mea theoria non constituuntur a spatio vacuo intermedio, quod spatium nihil est actu existens, sed est aliquid solum possibile a nobis indefinite conceptum, nimirum possibilitas realium modorum localium existendi cognita a nobis secludentibus mente omnem hiatum... Constituuntur a realibus existendi modis qui realem utique relationem inducunt » (*Theoria Philosophiæ naturalis*, p. 190). « Modi illi reales singuli et oriuntur ac pereunt et

Digitized by Google

sions, il est vrai, empruntées du reste à Boscovich, ne nous paraissent pas présenter un sens très clair, et semblent difficilement conciliables avec le passage reproduit ci-dessus (p. 144), où l'on voit apparaître chaque intervalle comme divisible à l'infini ; mais le passage actuel fait bien ressortir que le vide, comme tel, n'est rien et ne saurait constituer la distance de deux points.

Cela, cependant, ne nous dit pas ce que peuvent être ces relations réelles qui constituent la distance. M. de Vorges a cherché à résoudre l'énigme. Aux modes il commence par substituer des actions, selon la parole de Leibniz : « Les substances simples sont séparées les unes des autres par des actions [1] », et ces actions constituent les distances mutuelles des points.

M. de Vorges développe de façon ingénieuse cette conception ; mais nous devons avouer n'avoir pas saisi ce que pourraient bien être ces actions : quand on suppose acquise la notion de relation spatiale ou de distance, on conçoit sans peine des actions qui font varier ces relations ; mais, si relation et action ne font qu'un, celle-ci demeure une pure et simple inconnue.

Renonçant à éclaircir cette terrible question de la nature de l'espace, nous allons concentrer notre étude sur celle de la nature du temps, que Kant nous paraît avoir su découvrir, et sur laquelle Balmès a répandu de nouvelles lumières par de très heureux développements donnés à l'une des pensées de l'auteur de la *Critique de la Raison pure.*

indivisibiles prorsus mihi sunt ac inextensi et immobiles ac in suo ordine immutabiles... Nec aliud est in se quod illam determinatam distantiam habeant illa duo materiæ puncta quam quod illos determinatos existendi modos habeant quos necessario mutent ubi eam mutent distantiam » (p. 307).

1. *Principes de la Nature et de la Grâce.*

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
Digitized by Google

I

LA CONCILIATION DE L'ÊTRE ET DU NON-ÊTRE COMME ORIGINE DU TEMPS

Lorsqu'on parle de Kant et de sa théorie du temps, on ne manque jamais, et avec raison, de mentionner ce qu'il en dit dans l'*Esthétique transcendentale*, et nulle théorie n'est plus connue que celle des formes *a priori* de la sensibilité ; mais, au contraire, on passe le plus souvent sous silence, et en cela on a grand tort, les pensées si profondes qui se trouvent dans l'*Analytique transcendentale*. Son point de départ manque un peu de précision, ainsi qu'il résulte du résumé suivant qu'il en donne lui même : « Nous avons établi, dit-il, dans le principe précédent, que tous les phénomènes de la succession du temps ne sont que des *changements*, c'est-à-dire l'existence et la non-existence successives des déterminations de la substance permanente [1]. » Balmès reprend ce rapprochement de l'existence et de la non-existence, et sait en tirer des développements originaux et profonds qui méritent bien un examen détaillé et justifient une analyse générale du livre consacré par lui à la question du temps.

C'est avec une douce ironie que l'auteur de la *Philosophie fondamentale* raille la facile satisfaction de Buffier, qui, en véritable adepte du sens commun, n'éprouve aucune difficulté à expliquer ce qu'est le temps, et il fait bon le voir opposer à cette béate satisfaction l'anxiété de saint Augustin et ses ardentes supplications à Dieu pour en obtenir la

1. *Critique de la Raison pure*, trad. Tissot, t. I, p. 274.

Digitized by Google

lumière sur une question qui le trouble si profondément [1].

Écoutons, d'abord, Balmès mettre en lumière la difficulté même du problème : « Il ne semble point, dit-il, que le temps puisse être distingué des choses. En effet, qu'est-ce qu'une durée distincte de ce qui dure, une succession distincte de ce qui se succède ? Le temps serait-il une substance ? une modification inhérente aux objets et distincte des objets ? — Tout ce qui est quelque chose existe. Que l'on dise où existe le temps ! Le temps est composé d'instants divisibles à l'infini, essentiellement successifs et, partant, incapables de simultanéité. Imaginez l'instant le plus court possible ; efforts stériles ! cet instant se compose d'autres instants infiniment petits qui ne peuvent exister ensemble, et, partant, il n'est pas. Pour concevoir un temps existant, il le faut concevoir actuel, et, pour cela, le saisir en un instant indivisible ; mais cet instant n'est point le temps : il n'implique pas succession ; il n'est point une *durée* dans laquelle on trouve un *avant* et un *après* [2]. »

En vain dira-t-on que le temps est la mesure du mouvement, car on est obligé de supposer un mouvement uniforme, et « *l'uniformité de mouvement que l'on suppose est une pétition de principe* ». Il y a plus : « Dans l'idée de vitesse entre l'idée de temps, la vitesse étant le rapport entre l'espace parcouru et le temps employé à le parcourir... Le mouvement sert à mesurer le temps, le temps sert à mesurer le

1. « Quid est tempus ? Si nemo ex me quærat, scio, si quærenti explicare velim, nescio... Exarsit animus meus nosse istud implicatissimum ænigma. Noli claudere, Domine Deus, bone pater ; per Christum obsecro, noli claudere desiderio meo ista et usitata et abdita, quominus in ea penetret, et dilucescant allucente misericordia tua, Domine !... » (*Confessions*, livre XI, chap. XIV et XXII.)

2. Balmès a traité la question du temps dans le livre VII de la *Philosophie fondamentale*. Toutes nos citations seront empruntées à la traduction de M. Manec.

Digitized by Google

mouvement. » S'il n'y a pas cercle vicieux, il y a une même idée sous des aspects différents ; en tout cas, il n'y a entre le temps et le mouvement qu'un rapport, connu de tous, mais n'entamant même pas la difficulté philosophique, qui demeure tout entière.

Qu'est donc le temps? Il nous apparaît comme une chose fixe, indépendante de tout mouvement et de toute succession. Qu'est donc cette chose absolue? « Un pur accident? Son immutabilité, son universalité semblent dire le contraire. Tout vit dans le temps; il ne vit en rien; tout meurt dans le temps, et la mort ne saurait l'atteindre. L'accident est détruit quand la substance est détruite : le temps survit à la substance. Avant tout être créé, nous concevons des siècles et des siècles encore, c'est-à-dire le temps. Après tout être créé, nous concevons une durée successive, mais interminable, c'est-à-dire le temps... L'idée du temps semble indépendante de l'idée d'un être quelconque... Mais, comme, hormis la succession dans son mode le plus abstrait, il est par essence dépourvu de toute propriété, comme il n'implique aucune force,... ne pourrait-on pas dire qu'il n'est qu'une idée pure, une abstraction formée comme l'espace en présence des choses ? » Suit un éloquent parallèle entre l'espace et le temps, qui confirme ce rapprochement. Celui-ci, toutefois, ne doit pas empêcher de voir les différences qui les distinguent : les parties de l'espace sont coexistantes, tandis que celles du temps sont successives ; l'espace se rapporte uniquement au monde corporel, en sorte que son idée se rapporte d'une manière exclusive à l'ordre géométrique, au lieu que le temps s'étend à tout ce qui est successif, si bien que notre âme, réfléchissant sur elle-même, peut faire abstraction de l'espace, mais non du temps.

Revenant alors sur la conception du temps indépendant de toute chose qui dure, Balmès en reconnaît l'inanité. Le temps « n'a point d'existence propre ; le séparer des êtres,

Digitized by Google

c'est l'anéantir. — Ainsi l'infinité attribuée au temps n'est qu'une conception vague, sans fondement et sans réalité. Or, nous venons de voir que cette conception existe, même dans la supposition de l'anéantissement de toutes choses. Les siècles infinis que nous concevons avant la création du monde ne sont rien ; temps imaginaires semblables à l'espace imaginaire. »

Indépendamment de l'existence des corps, le temps se manifesterait à nous dans la succession des opérations de notre âme; mais cette succession lui est indispensable : il commence avec les êtres changeants ; ces êtres cessant d'exister, il s'évanouirait avec eux.

Qu'est-ce donc que le temps? « Le temps est la succession des choses au point de vue abstrait. — Et la succession? C'est l'être et le non-être. Une chose est, elle cesse d'être ; voilà la succession... Le temps ne saurait exister sans être et non-être ; car c'est en cela que consiste la succession. S'il y a succession, il y a changement : il n'y a point changement sans qu'une chose soit d'une autre manière ; *autre* implique une chose antérieure qui cesse d'être... Donc le temps dans les choses est la succession des choses mêmes, leur être et leur non-être. Le temps dans l'entendement, c'est la perception de ce changement, de cet être et de ce non-être. »

S'il est tel, le temps n'est point absolu, car il est, dans les choses, le *rapport* de l'être et du non-être et, dans l'entendement, la perception de ce rapport. De cette relativité essentielle du temps résulte, comme on l'a vu dans notre chapitre IV, que l'accélération proportionnelle de tous les changements, corporels et psychiques, est une chose dénuée de sens, et nous avons vu aussi que Balmès a bien saisi cette conséquence : il est superflu d'y insister à nouveau.

Mais l'être et le non-être ne forment pas forcément succession : en des choses distinctes, ils n'excluent point la simultanéité, et, dans une même chose, ils n'impliquent

Digitized by Google

répugnance que s'ils se rapportent à un même temps. Mais alors le temps est toujours présupposé, et, par suite, il n'est pas suffisamment expliqué par l'être et le non-être, et il reste à trouver une explication fondamentale de la succession. « Il est des choses qui s'excluent et d'autres qui ne s'excluent pas. L'existence des choses qui s'excluent implique succession. » Tel est le cas d'un même corps occupant plusieurs positions différentes. Toute variation implique exclusion et par là même succession. « Percevoir ces exclusions réalisées, c'est percevoir la succession ou le temps ; *compter ces exclusions*, ces destructions dans lesquelles s'offrent à nous des choses distinctes, lesquelles s'excluent comme être et n'être pas, *c'est compter où mesurer le temps.* »

Ici apparaît une nouvelle difficulté : si la succession implique exclusion, les choses qui ne s'excluent point sont simultanées, et, par exemple, le mouvement des feuilles sur les arbres du paradis terrestre est simultané à celui des feuilles sur les arbres de nos jardins, car ils ne s'excluent point.

Assurément, « s'il existait un être, lequel, n'excluant rien, ne fût exclu par rien, cet être serait en même temps que toutes choses ». C'est pour cela que, conformément à une doctrine peut-être peu comprise par ceux qui l'énoncent, « Dieu est présent à tous les temps ; que pour lui il n'y a point de succession, qu'il n'y a ni avant ni après ».

Mais Dieu seul est dans ce cas ; dans l'exemple précédent, les arbres de nos jardins se rattachent à ceux du paradis terrestre par toute la suite de mouvements qui constituent le développement de tous les arbres d'où procèdent les premiers, et, de même, l'air qui agite aujourd'hui les feuilles a été mis en mouvement par un mouvement antérieur, et celui-ci par un autre...

Balmès aborde ici (chap. VIII) la question de la coexistence ; mais il la traite d'une façon très contestable, sur

Digitized by Google

laquelle nous reviendrons dans le paragraphe suivant. Sa façon de parler du présent ne nous plaît pas beaucoup non plus, car il en fait l'être sans rapport, ce qui est l'être pur et simple et ne nous donne pas l'idée temporelle du présent. Quant aux idées de passé et de futur, elles sont essentiellement relatives, dépendant du point auquel on rapporte les faits envisagés.

Une chose peut-elle être passée (ou future) par rapport à l'intelligence infinie ? « Admettre l'affirmative, c'est introduire le temps dans la durée de Dieu, par où nous détruisons son éternité, qui exclut toute succession. Admettre la négative, c'est affirmer qu'une chose passée n'est point passée, puisque les choses sont telles que Dieu les connaît. » Problème parfaitement posé, l'un des plus troublants qui existent, mais auquel Balmès nous paraît répondre d'une façon un peu insuffisante et sur lequel nous reviendrons. Ainsi en est-il de quelques questions spéciales auxquelles nous ne nous arrêterons pas en ce moment.

Simple rapport entre l'être et le non-être, l'idée pure du temps, le temps abstrait n'admet point de mesure ; mais celle-ci devient possible si l'idée pure se combine avec les phénomènes de l'ordre expérimental. Pour former cette mesure, au milieu de ce flux et reflux d'existences intérieures ou extérieures, deux choses nous sont nécessaires : un phénomène sensible et l'idée du nombre ; et la mesure du temps consiste précisément dans le *dénombrement des mutations de ce phénomène*.

Enfin, Balmès termine son étude du temps en envisageant le rapport de cette idée avec le principe de contradiction : « Il est impossible qu'une chose soit et ne soit pas en même temps. » Or, il semble que l'existence de ce principe présuppose l'idée du temps, qui figure dans son énoncé, et, d'autre part on ne saurait concevoir le temps, si l'on ne présuppose ce principe. « Serions-nous enfermés dans un

Digitized by Google

cercle vicieux, et cela à propos du principe même de nos connaissances ? »

D'une façon un peu trop incidente, Balmès note que, au point de vue des êtres nécessaires (et nous prendrons ce terme d'êtres dans son sens le plus général, c'est-à-dire comme visant notamment les idées), l'existence exclut d'une manière absolue la non-existence; d'où il suit que le principe de contradiction à leur égard est absolu et indépendant de l'idée de temps, laquelle nous serait étrangère, si nous ne concevions que des êtres nécessaires.

Sous réserve de cette observation, le lien entre l'idée de temps et le principe de contradiction est incontestable, et il faut résoudre la difficulté signalée par Balmès. Comme il le dit lui-même, elle disparaîtrait si l'on concevait le temps comme un être existant par lui-même, ou comme une capacité vague comprenant les êtres successifs; mais, si l'explication est commode, elle ne soutient pas l'examen. La véritable explication, selon Balmès, se trouve dans l'appréciation des conditions qui rendent un cercle *vicieux* ou non. Dans les définitions, le cercle est un défaut lorsqu'il s'agit de spécifier ce qui n'est pas identique; « mais, s'il s'agit de deux idées identiques au fond, bien que distinctes en apparence, parce qu'elles s'offrent sous des aspects différents, il est impossible d'expliquer l'une sans trébucher à l'autre, et d'aller vers celle-ci sans se tourner vers celle-là... Il y a cercle, mais non cercle vicieux ; les deux idées s'expliquent l'une par l'autre, parce qu'elles ne sont qu'une même idée. » Tel est le cas actuel.

« L'idée du temps implique la perception d'êtres non nécessaires, lesquels puissent passer de l'être au non-être, et *vice versa*. La différence entre le nécessaire et le contingent, c'est que, dans le premier, l'être exclut le non-être d'une manière absolue; que, dans le second, il ne l'exclut que sous condition, c'est-à-dire moyennant la simultanéité... Ainsi,

Digitized by Google

la perception du temps et la non-nécessité des choses sont deux idées corrélatives... ; percevoir un être non nécessaire ou percevoir un être qui peut cesser d'être, c'est une même chose ; cette perception nous donne l'idée de la succession, c'est-à-dire du temps réel ou possible. »

Nous avons reproduit l'essentiel de l'exposé de Balmès sans y mêler presque aucune réflexion, car il nous a semblé que c'était le meilleur moyen de faire ressortir cette pensée profonde, qui n'occupe pas, dans l'opinion générale, la place qu'elle mériterait. Aussi avons-nous été heureux de voir toute cette théorie reprise ou retrouvée (nous ne savons lequel des deux) par un philosophe dont la thèse récente a obtenu le plus légitime succès.

« Outre la différence, dit M. Boirac, le changement implique la succession. Pour qu'il y ait changement, il faut que des différences s'excluent l'une l'autre, se chassent, pour ainsi dire, l'une l'autre de l'existence. Deux faits se succèdent, pourrait-on dire, quand l'existence de l'un est la non-existence de l'autre. La succession est, en un sens, la contradiction réalisée ; par elle, le non-être est, l'être n'est pas ; le même sujet possède des attributs non seulement différents, mais contradictoires. En un autre sens, elle est ce qui empêche et ôte la contradiction, car c'est le non-être d'avant qui devient l'être d'après, et ce n'est pas en même temps, mais tour à tour, que les attributs contradictoires se posent dans le même sujet [1]. »

Toute la pensée de Balmès n'est-elle pas résumée dans ce passage ? Nous n'en développerons pas les conséquences en ce moment [2] ; mais, après avoir montré en quoi elle est

1. *L'Idée du Phénomène*, p. 140 et 141.

2. Une conséquence dont nous n'aborderons pas l'étude, parce qu'elle s'écarte de notre sujet, consiste dans l'idée d'identité fondamentale de l'être qui change, car s'il n'y avait que des phéno-

Digitized by Google

insuffisante, nous chercherons à la compléter, et ce n'est qu'ensuite que nous en ferons l'application à un certain nombre de questions, dont quelques-unes fort importantes.

Le défaut essentiel de la théorie de Balmès consiste dans son impuissance à faire distinguer l'avant de l'après : elle explique, si l'on veut, la notion de succession, mais en laissant indéterminé l'ordre de cette succession. Que l'on place A avant B, ou B avant A, la contradiction entre ces deux termes sera également dissipée, et l'on peut dire que, à s'en tenir à cette conception, la réversibilité du monde matériel comme du monde moral est absolue. Or, il est indispensable de trouver le principe de la distinction de l'avant et de l'après, si l'on veut élucider réellement l'idée de succession. Il y a plus : non seulement la théorie de Balmès laisse sans réponse le problème de la réversibilité, ou plutôt rend celle-ci absolue, mais elle ne permet même pas d'établir un enchaînement à sens déterminé, car elle ne donne pas de motif pour rapprocher d'un état un autre état de préférence à tout autre. On peut donc dire qu'elle nous donne de la poussière de temps, mais qu'il reste à trouver un principe organisateur qui de cette poussière permette de faire un tout cohérent.

Dans la vie pratique, et même dans les sciences expérimentales, on peut négliger de telles questions, car il suffit

mènes juxtaposés, aucun ne serait contradictoire à l'autre, et, par suite, leur rapprochement serait impuissant à engendrer l'idée de succession et de temps. « Le changement, a dit Kant, est un mode d'existence qui succède à une autre manière d'être du même objet. Par conséquent, tout ce qui change est *permanent*, son état seul *change*. Et comme ce changement ne se rapporte qu'aux déterminations qui peuvent finir ou commencer, l'on peut dire (quoique avec une apparence de paradoxe) que le permanent seul (la substance) est changé ; que le muable n'éprouve aucun changement, mais seulement une *vicissitude*, puisque, parmi les déterminations, quand les unes cessent, les autres commencent » (t. I, p. 272).

Digitized by Google

que tout le monde soit d'accord pour ordonner de même façon les phénomènes, quelle que soit l'ignorance générale sur le principe de cet ordonnancement, et pour cela la sensibilité suffit. Même certains philosophes, qui regardent le temps comme une réalité indépendante des choses qui passent, peuvent négliger d'approfondir ces difficultés, car l'avant et l'après et tout l'ordre des successions sont, à leurs yeux, déterminés par la position des choses dans ce contenant réel. Mais, pour qui a dépassé ce point de vue un peu ingénu, il y a là un problème qu'on ne saurait éluder et que Kant a bien posé en ces termes : « J'ai conscience seulement que mon imagination place l'un avant et l'autre après, et non que, dans un objet, un état précède l'autre ; ou, en d'autres termes, le rapport objectif des phénomènes successifs n'est point déterminé par la simple perception. Afin donc que ces phénomènes soient connus comme déterminés, il faut que le rapport entre les deux états soit conçu de telle manière qu'il soit comme nécessairement déterminé par là lequel de ces deux états doit être placé avant, lequel doit être placé après, et non réciproquement[1]. »

II

IDENTITÉ DE LA RELATION TEMPORELLE ET DE LA RELATION DE CAUSALITÉ OCCASIONNELLE

Guyau avait bien compris cette nécessité de découvrir un principe de distinction entre l'avant et l'après, et l'on sait comment il a prétendu dériver le temps de l'espace, faisant de ce qui est devant nous le futur et de ce qui est derrière le passé[2]. Mais cette solution ne saurait nous satisfaire, car,

1. *Critique de la Raison pure*, Analytique des principes, seconde analogie, t. I, p. 275.
2. *La Genèse de l'Idée de Temps.*

Digitized by Google

d'une part, elle ne fait que reculer la difficulté, si l'espace, comme le temps, est sans réalité propre, et, d'autre part, elle accorde au spatial sur le psychique pur une prédominance que nous ne saurions admettre, tenant pour certain que les phénomènes mentaux revêtent la forme temporelle indépendamment de toute forme spatiale.

Ce n'est pas à Hume, assurément, que nous demanderons une réponse, car il commence sa définition de la cause en disant: « La cause est un objet qui en précède un autre[1]...», sans paraître se soucier de savoir ce que peut signifier cette expression « précède ».

Mais Kant, après avoir posé la question avec la précision que nous avons vue, nous paraît bien y avoir fait la véritable réponse : « Le concept emportant la nécessité de l'unité synthétique ne peut être qu'un concept pur de l'entendement, concept qui ne se trouve point dans la perception ; et ce concept est celui du *rapport de la cause et de l'effet*[2]. »

Pour Hume, la cause, ou mieux l'ensemble des causes est la totalité des conditions antécédentes à la production d'un phénomène ; pour nous, au contraire, dans un groupe de faits, ceux qui sont la condition des autres sont dits les précéder, et les seconds suivent les premiers, sans que ces expressions signifient autre chose que cette relation de *causalité occasionnelle*, pour employer le langage de Malebranche.

Après avoir si magistralement développé la pensée kantienne que le principe du temps est dans la synthèse de l'être et du non-être, Balmès n'a pas su tirer parti du complément essentiel que Kant avait donné à cette pensée ; le philosophe espagnol énonce bien que « la dépendance représentée

1. *Traité de la Nature humaine*, liv. I, sect. XIV, traduction Renouvier et Pillon, p. 225.
2. *Loc. cit.*

Digitized by Google

comme rapport de durée... ne nous offre autre chose que le rapport même exprimé par le principe de causalité[1] », mais, sous sa plume, ce principe est resté stérile. Il a traité, en effet, toutes les questions relatives au temps, sans s'inquiéter de la causalité autrement que pour en faire la base d'une objection.

Mais Kant lui-même a développé les points essentiels de la théorie causale du temps, et nous n'aurons qu'à compléter les considérations exposées dans sa seconde et sa troisième *analogie*. Sans le suivre pas à pas, nous allons envisager la question sous le point de vue qui concorde le mieux avec l'ensemble de notre étude.

Si l'on considère le monde des corps, le principe du déterminisme mécanique énonce que l'état d'un système de points matériels, à un certain instant, est déterminé par ses états antérieurs et détermine ses états postérieurs ; pour nous, cette loi se réduit à l'énonciation que les états de ce système sont déterminés les uns par les autres, et que les états déterminants sont dits, *par définition*, antérieurs aux états déterminés, chaque état étant, d'ailleurs, à la fois déterminé et déterminant, suivant qu'on considère sa relation à l'un ou à l'autre des divers états. Il est bien vrai que, dans la théorie mécaniste, au sens étroit qu'attribuent à ce mot MM. Boutroux et Poincaré, les mouvements d'un système matériel sont réversibles, en sorte qu'il serait impossible de distinguer les états déterminants des états déterminés, du moment qu'on ne peut emprunter au temps le principe de cette distinction. Mais nous avons vu, dans le chapitre IV, que la mécanique peut n'être pas conforme au système en question, ni satisfaire au principe de réversibilité, et que, le fût-elle, on disposerait encore d'un principe de distinction, puisque le sens inverse de celui que

1. *Philosophie fondamentale*, liv. X, chap. VII, n° 82.

Digitized by Google

nous adoptons instinctivement attribuerait aux phénomènes un caractère d'instabilité invraisemblable.

Quoi qu'il en soit, l'enchaînement des phénomènes psychiques ne peut essentiellement avoir lieu que dans un sens déterminé, et ce sens impose celui des phénomènes spatiaux, par suite de la liaison qui existe entre les deux ordres de phénomènes : la piqûre d'une épingle *précède* la douleur, puisqu'elle en est la cause, et, de même, la volonté de lever mon bras précède ce mouvement.

Mais revenons à l'exemple d'un système de points matériels pour examiner, à son occasion, une difficulté fondamentale et d'une portée générale. Vous êtes parti, nous dira-t-on, d'un certain état de ce système, c'est-à-dire d'un état à un instant déterminé ; or, poser ainsi la simultanéité, c'est poser le temps, et, par suite, nous n'avons pu, semble-t-il, en déduire le temps que par un cercle vicieux. Cette objection oblige à approfondir l'idée de simultanéité. Si nous supposons un univers immobile, l'absence de tout changement entraîne pour conséquence que cet univers est en dehors du temps, ou plutôt que le temps n'existe pas ; mais, dans notre langage tout imprégné de la notion du temps, nous dirons incorrectement qu'il y a simultanéité des diverses relations existant entre les parties de cet univers. On voit donc que la notion d'état statique d'un système de points matériels est, en réalité, une notion extra-temporelle. Le temps apparaîtra lorsqu'on envisagera plusieurs états différents d'un même système de points ; mais chacun de ces états considéré isolément est étranger à la notion du temps. L'accusation de cercle vicieux ne reposait donc que sur l'introduction non motivée de l'idée temporelle de simultanéité [1].

1. Nous devons ici prévoir une objection : l'état d'un système

Digitized by Google

Cette dernière notion a été particulièrement bien mise en lumière par Kant, dans sa troisième *analogie*. Empiriquement, la notion de simultanéité dérive de ce que la perception d'une chose peut suivre celle d'une autre, et réciproquement, et le simultané est l'existence de la diversité dans le même temps. « Mais on ne peut percevoir le temps lui-même, pour en conclure que les choses sont placées dans le même temps, que leurs perceptions peuvent se succéder réciproquement. La synthèse de l'imagination dans l'appréhension indiquerait seulement que chacune de ces représentations est dans le sujet quand l'autre n'y est pas, et réciproquement, mais non pas que les objets soient en même temps,... et que cela soit nécessaire pour que les perceptions puissent se succéder réciproquement. Il faut donc un concept intellectuel, touchant la succession réciproque des déterminations des choses existantes en même temps les unes hors des autres, pour pouvoir dire que la succession réciproque des perceptions a son fondement dans l'objet, et que le simultané soit représenté par là comme objectif. Or, le rapport des substances, dans lequel l'une comprend les déterminations dont la cause est contenue dans l'autre, est le rapport de l'influence; et si réciproquement cette influence contient la cause des déterminations de l'autre, il est le rapport de mutualité, de réciprocité ou d'action et de réaction [1]. »

de points matériels qui détermine ses états suivants comprend leurs vitesses aussi bien que leurs positions, et la notion de vitesse suppose celle du temps. Ceci serait exact si l'on tenait à ce qu'un seul état suffit à déterminer les suivants, mais cela équivaut à faire la synthèse de deux états successifs, et nous avons parfaitement le droit de ne pas la faire et de n'envisager que des états géométriques. Nous avons, du reste, été déjà amené, dans le chapitre précédent (p. 155), à refuser une valeur propre à l'état de mouvement.

1. T. I, p. 299 et 300.

Digitized by Google

L'application de cette théorie apparaît nettement dans les phénomènes tels que ceux d'attraction mutuelle de deux corps, car tous deux sont, l'un par rapport à l'autre, dans la double relation de cause et d'effet, puisque chacun occasionne à l'autre une accélération et en reçoit une inversement. Indépendamment de cette simultanéité directe, on en conçoit une indirecte, comme serait celle résultant de l'hypothèse de deux corps sans action mutuelle l'un sur l'autre, mais échangeant tous deux des accélérations avec un même troisième. Cet exemple est extrêmement simple, mais on conçoit sans peine l'extension illimitée des applications de ce principe des liaisons indirectes, qui fait rentrer dans un temps unique tous les phénomènes de notre univers, à supposer que les atomes n'aient pas tous une action directe sur la totalité des autres atomes.

Avant d'aborder l'étude des applications de la théorie causale du temps à diverses questions philosophiques, il nous reste à mentionner une objection à laquelle Kant a pris soin de répondre : certaines causes, dit-on, peuvent être en même temps que leurs effets ; telle est, dans une chambre, la chaleur que cause un foyer allumé. Kant répond justement, bien qu'en termes peu exacts, que cela tient à ce que la cause ne peut opérer en un clin d'œil son effet tout entier[1] ; mais il nous semble qu'on doit ajouter, pour être clair, que chaque phénomène d'échauffement est causé par un phénomène de combustion qui l'a réellement précédé.

Dans un autre exemple, on considère un globe posé sur un duvet comme cause de l'enfoncement qu'il occasionne, et Kant s'exprime ainsi : « Si je mets le globe sur le duvet, alors la dépression du duvet se détermine en conséquence de la figure polie de la boule ; mais, si le duvet présente déjà un enfoncement (je ne sais à quelle occasion), alors

1. T. I, p. 290.

Digitized by Google

il ne suit plus les contours de ce globe. » Pour nous, nous ferions ici une distinction : ou le duvet a du ressort et tend à se redresser, ou, au contraire, une fois comprimé, il conserve la forme qu'il a reçue. Dans ce dernier cas, le globe a été, si l'on veut, cause de la déformation au moment où elle se produisait, mais il est plus exact de dire que les situations relatives de la terre, du duvet et du globe se sont déterminées les unes les autres suivant la loi de causalité. Le mouvement terminé, la causalité disparaît. Quant au cas où l'on accorde du ressort au duvet, il rentre nettement dans celui de simultanéité par action et réaction réciproque entre les deux objets. On doit remarquer, d'ailleurs, que les difficultés de ce genre tiennent à des énoncés plus ou moins incorrects, où l'on donne le nom de cause à des objets isolés et non à l'ensemble des conditions déterminantes.

III

APPLICATIONS DIVERSES. — DIEU ET LE TEMPS

Après avoir accepté l'hypothèse de Kant sur la nature de la relation temporelle et avoir montré comment elle permet de distinguer les trois relations d'antécédence, de concomitance et de succession, nous devons en faire l'application à un certain nombre de questions, en première ligne desquelles vient le caractère de divisibilité illimitée que nous avons reconnu au temps, tout en n'admettant que des réalités indivisibles (voir le chap. v).

Or, l'assimilation de la relation temporelle à la relation causale nous paraît bien en concordance avec une telle conception. Après avoir considéré, en effet, une série d'états discontinus, par exemple une suite de positions relatives de

Digitized by Google

deux points qui s'attirent [1], et nous être ainsi mis en présence de successions immédiates, nous pouvons fort bien concevoir qu'une autre série, en relation avec la précédente, soit telle que deux termes simultanés à deux termes consécutifs de la première série ne soient pas consécutifs eux-mêmes, et aucune limite ne saurait être imposée au nombre des termes ainsi interposés, bien qu'en fait et pour chaque cas particulier ce nombre soit forcément déterminé. Il semble inutile d'insister sur une concordance si caractéristique entre la théorie causale et les exigences imposées *a priori* à toute théorie du temps.

Voici maintenant une question posée par Balmès, résolue par lui à titre d'objection précisément au moyen de la théorie causale, mais à laquelle il prétend donner une autre réponse, sans que nous puissions voir ce qui l'y pousse et sans que, à notre avis, il trouve aucune raison sérieuse à opposer à l'adversaire qu'il avait si bien fait parler, sous quelques réserves que nous aurons à formuler. Voici d'abord, cette prétendue objection : « On dit : Si la succession du temps implique exclusion, supprimer l'exclusion, c'est admettre la coexistence ; ainsi, dans la supposition que Dieu eût créé d'autres univers, ces univers auraient été contemporains du nôtre ; en effet, ils ne se seraient point exclus ; *ces divers mondes n'ayant entre eux aucun rapport de cause et d'effet*, nous ne pourrions leur appliquer le raisonnement dont nous nous sommes servis dans le chapitre précédent. C'est pourquoi nous devrions tenir pour impossible l'existence d'un monde *antérieur* au monde actuel, toutes choses devant être contemporaines, pourvu qu'elles n'emportent pas exclusion [2]. »

1. Nous avons vu que le mouvement ne saurait être continu (p. 140).
2. Livre VII, chap. VIII, *Ce qu'est la coexistence.*

Digitized by Google

Dans ce passage, disons-le de suite, il y a une chose que nous ne saurions accepter, à savoir l'affirmation que ce qui n'est ni antérieur ni postérieur à une chose lui est coexistante, car elle suppose qu'il existe entre les deux choses considérées un lien temporel. Or, précisément, ce lien fait défaut dans l'espèce actuelle, puisqu'il n'y a *aucun rapport de cause et d'effet.*

En parlant ainsi, nous avons en vue le Dieu de Balmès et de la théologie catholique, Dieu parfaitement immuable ; mais il en serait autrement avec le Dieu de M. Renouvier, Dieu à la pensée mobile et changeante et, par suite, Dieu temporel. Il n'y a pas de doute, en effet, que la pensée omnisciente d'un tel Dieu ramènerait à l'unité tous les temps qui, indépendamment de cette pensée, resteraient isolés les uns des autres. Mais, à nous en tenir à un Dieu immuable, nous ne saurions trouver dans sa pensée un lien entre les séries distinctes de phénomènes, car il les connaît telles qu'elles sont, c'est-à-dire comme essentiellement distinctes et sans les rattacher, comme celui de M. Renouvier, à une autre série, celle de ses propres états, puisque cette dernière et suprême série n'existe pas. Nous devons conclure de là, sans hésitation, que des mondes sans relations entre eux ne seraient ni successifs ni coexistants les uns aux autres : ce sont là des qualificatifs temporels qui supposent un lien dont l'absence est précisément posée par hypothèse.

Telle n'est pourtant pas la conclusion de Balmès ; nous allons voir que son argumentation, ou bien est sans portée, ou bien revient à poser en réalité un lien de causalité occasionnelle entre les deux mondes. Après avoir formulé l'objection que nous avons reproduite, il s'exprime ainsi : « Cette difficulté peut paraître spécieuse si l'on n'a parfaitement compris le sens du mot exclusion. — Lorsque je dis exclusion, je n'entends point seulement une répugnance

Digitized by Google

intrinsèque ; j'entends que, pour une raison quelconque, intrinsèque ou extrinsèque, l'existence d'un être étant posée, la négation de l'autre se trouve posée. Cette explication résout la difficulté. — Dieu peut soumettre à cette exclusion deux mondes entièrement indépendants ; il peut créer l'un sans créer l'autre : de là, existence du premier et non existence du second. Dieu peut cesser de conserver le premier et créer le second ; de là, existence du second et non existence du premier ; de là, un *avant* et un *après*, c'est-à-dire succession dans l'existence. Dieu les peut créer en même temps ; de là, coexistence. »

La discussion de ce texte est fort délicate, car on y trouve des expressions évidemment impropres, telles que : « Dieu peut *cesser* de conserver, » qui, au propre, mettraient le temps en Celui-ci. Il serait puéril de s'attaquer à ces expressions ; mais, en même temps qu'on les écarte du débat, il faut conserver ce qu'elles peuvent avoir de signification légitime, et la tâche n'est pas aisée. Or, ou bien, comme on le croirait à première vue, Balmès trouve en Dieu lui-même le principe de l'avant et de l'après, ce qui est en contradiction avec toute sa doctrine, ou bien il fait du dernier état de l'un des mondes la cause occasionnelle du premier état de l'autre monde, et alors nous sortons de l'hypothèse de deux mondes complètement indépendants [1].

On peut d'ailleurs noter ici comment, en développant sa pensée sur la coexistence, Balmès en fait apparaître l'inexactitude. « Deux êtres coexistent ou existent en un même

1. Revenant plus loin sur la même question (chap. IX), Balmès déclare qu'il ne saurait y avoir un intervalle de temps entre deux mondes successifs indépendants, mais qu'on ne peut les dire immédiats, car cela supposerait un rapport qui n'existe pas par hypothèse. Il y a là une pensée profonde, mais qui condamne l'idée de succession, comme celle de coexistence, entre deux mondes absolument indépendants.

Digitized by Google

temps, dit-il, lorsque l'un ne succède point à l'autre. Pour concevoir la coexistence des êtres, nous n'avons qu'à concevoir leur existence. » Nous avons déjà fait remarquer que la coexistence est une idée temporelle et que, pour coexister, il faut appartenir à un même temps; mais le rapprochement avec l'exemple précédent fait clairement ressortir, par l'absurde, la vérité de cette assertion. Étant supposés, en effet, deux mondes indépendants et non successifs, selon la conception de Balmès, chacun des phénomènes de chacun de ces mondes pourra être considéré comme coexistant à tous les phénomènes de l'autre monde, car on ne voit pas ce qui pourrait servir de base à une coexistence plutôt qu'à toute autre, puisque les deux séries sont indépendantes l'une de l'autre.

Avançant davantage dans l'étude des questions qui concernent les rapports de Dieu et du temps, nous arrivons à celle-ci : une chose peut-elle être passée ou future pour l'intelligence infinie? « Admettre l'affirmative, dit Balmès, c'est introduire le temps dans la durée de Dieu, par où nous détruisons son éternité, qui exclut toute succession. Admettre la négative, c'est affirmer qu'une chose passée n'est point passée, puisque les choses sont telles que Dieu les connaît ». La difficulté est parfaitement posée, et nous pouvons dire que c'est surtout l'obsession de ce dilemme qui nous a poussé à approfondir cette notion du temps, ne pouvant accepter la solution bien connue de M. Renouvier, solution qui supprime la difficulté par la négation d'un Dieu immuable. De cette négation, en effet, le principe du nombre force à conclure à un commencement de Dieu, sans quoi celui-ci aurait passé par une infinité d'états différents, et M. Renouvier, avec cette droiture intellectuelle qui est son honneur, n'hésite pas à accepter cette conclusion. Mais alors, comme il le dit lui-même, ce commencement est véri-

Digitized by Google

tablement absolu et sans raison d'aucune sorte : nouvel abîme devant lequel notre pensée recule.

Avant de montrer comment l'identification de la relation causale et de la relation temporelle résout la difficulté, voyons si la simple thèse de l'être et du non-être peut suffire à cette tâche, comme le croit Balmès. « Posons une hypothèse, dit-il : Dieu n'a créé qu'un seul être, et cet être a cessé d'exister. Dieu connaît l'existence et la non-existence de l'objet : acte intellectuel très simple, qui n'implique de succession d'aucune sorte. Par rapport à Dieu, il n'y a point, à proprement parler, de passé; appliquée à l'objet, cette idée du passé n'exprime autre chose que la non-existence relativement à l'existence déjà détruite ; sous ce point de vue, il est facile de comprendre comment il n'y a point de passé en Dieu, mais seulement connaissance des choses passées. »

Ceci veut dire évidemment que, pour Dieu, il n'y a point de choses passées ou futures, et qu'il les connaît toutes immuablement, avec leur double qualité d'être et de non-être ; mais alors qu'est-ce qui, pour lui, distingue les choses antécédentes des choses conséquentes? et nous nous retrouvons en face de l'insuffisance déjà constatée de la théorie de Balmès à expliquer cette distinction. Au contraire, si on complète cette théorie, comme il a eu plus d'une fois la velléité de le faire, par la considération de la relation causale, on peut hardiment accepter l'affirmation que, pour Dieu, il n'y a ni passé ni futur, mais un enchaînement de choses conditionnées les unes par les autres.

Ainsi se trouve conservée une distinction logique et non temporelle entre l'antécédent et le conséquent, distinction connue de Dieu ; à celle-ci, pour les êtres sensibles, s'ajoute naturellement une modification étrangère à l'être immuable, et l'on peut, en toute vérité, dire avec Kant que le temps est une forme de notre sensibilité, mais une forme qui

Digitized by Google

recouvre une distinction rationnelle. Il est vrai que cette théorie du temps contredit l'idée que nous nous en formons presque invinciblement et donne un caractère illusoire à cette idée. Mais n'est-ce pas là un trait commun à toutes les théories sérieuses sur la nature intime des faits intéressant notre sensibilité ? Quelles ne sont pas les révoltes du sens commun quand on nie qu'il y ait rien dans les corps qui ressemble à nos sensations des couleurs ou que nos douleurs soient localisées dans les diverses parties de notre organisme ? Plus grande encore, s'il est possible, est la répugnance de nos penchants instinctifs à admettre que nous ne connaissons réellement que nos propres états d'âme et que, par suite, le monde extérieur n'est qu'inféré, légitimement ou non. Eh bien ! dans le cas présent, il semble que nous devons heurter plus brutalement encore ce qu'on pourrait appeler la constitution intime de notre vie psychique, car il n'est pas un de nos états de conscience qui ne s'encadre dans le temps et ne revête cette forme, selon nous, illusoire. S'il en est ainsi, les révoltes que nous sentons en nous-mêmes n'ont rien qui puisse surprendre, car nous y sommes dès longtemps préparés par des révoltes analogues et désormais reconnues sans fondement rationnel. Combien insignifiant n'est pas tout ce tapage de la sensibilité, pour celui qui trouve dans cette théorie la réponse au grand problème des rapports de Dieu et du temps ?

Toutefois, il faut bien le reconnaître, nous nous heurtons à une difficulté beaucoup plus grave que la précédente. Nous avons vu M. Renouvier, obligé par le principe du nombre à limiter le temps dans le passé (et nous le sommes avec lui), en conclure que son Dieu temporel a commencé ; mais il n'éprouve aucune difficulté à lui accorder, comme aux autres êtres, l'immortalité, puisque le nombre de ses états de conscience réalisés sera toujours fini, bien que gran-

Digitized by Google

dissant au-delà de toute limite donnée. Nous, au contraire, nous ne rencontrons pas de difficulté à l'origine, puisque nous avons un Dieu immuable, sans commencement par conséquent, auquel sont dus tous les êtres finis ; mais nous avons dit qu'il n'y a, en soi, ni passé, ni futur, que tout est également réel. D'où il suit que les phénomènes à venir sont assujettis à la loi du nombre aussi bien que les phénomènes passés. Faut-il en conclure que, hormis Dieu, tout doit finir, comme tout a commencé ? Cette réponse s'imposerait s'il n'en était une autre, consistant dans l'hypothèse d'un étal final immuable, qui mette fin au temps, sans mettre fin aux existences contingentes.

Nous n'ignorons pas combien une telle conception est de nature à blesser les âmes les plus nobles, qui ne peuvent se résigner à la pensée qu'elles s'arrêteront un jour dans leur progrès dans la connaissance et l'amour de la Divinité. Peut-être s'exagèrent-elles la difficulté en se plaçant inconsciemment au point de vue d'un être encore temporel, pour lequel l'immobilité, à un point de vue, devient sensible et fait même l'effet d'un recul, au sein de l'universel écoulement des choses. Quoi qu'il en soit, cette difficulté n'est point particulière à notre théorie du temps, mais se présente à tous ceux qui, admettant le principe du nombre, croient à la prescience de Dieu, conséquence nécessaire de son immutabilité : c'est ce qu'a bien vu un des penseurs catholiques les plus sérieux de notre siècle, Th.-Henri Martin.

La prescience divine, alors même que l'univers ne présenterait aucun phénomène libre, apparaît comme une terrible pierre d'achoppement; car, si le monde doit durer indéfiniment, et si les phénomènes qui s'y produiront sont tous connus de Dieu, son intelligence embrasse un nombre infini de phénomènes, c'est-à-dire une contradiction. MM. Renouvier et Pillon en concluent simplement que la science de Dieu n'est infinie qu'en puissance, et que, si sa

Digitized by Google

pensée peut se reporter sur un phénomène à venir quelconque (les actes libres réservés, mais ils pourraient ne pas l'être), jamais elle ne peut embrasser la totalité de l'avenir; une fois posé un Dieu temporel, toute difficulté disparaît, en effet, de ce côté.

Th.-Henri Martin ne pouvait faire une telle réponse; aussi sa pensée s'arrête-t-elle troublée devant ce mystère. « Il y a certainement quelque chose que je ne puis comprendre, dit-il. Mais j'ai déjà fait profession d'admettre l'incompréhensible quand il est démontré vrai, et de ne rejeter *a priori* que ce qui est évidemment absurde et contradictoire. Or, la solution de cette grave difficulté est au-delà de la portée de notre intelligence. Cette solution se trouverait infailliblement dans une notion parfaite, que nous n'avons pas, du mode de la connaissance divine. Mais, en deçà des limites de ce que mon intelligence peut atteindre, je ne vois pas là une contradiction manifeste. Je vois bien qu'il impliquerait contradiction qu'une intelligence, qui, comme la mienne, n'embrasserait les objets que par des pensées distinctes les unes des autres et successives, pût avoir la notion de chacun des êtres et de chacun des événements successifs d'un avenir sans fin, qui, pour elle, n'est pas encore. Mais, sans comprendre les procédés de l'intelligence divine, je sais qu'elle ne procède pas par pensées séparées et successives, et qu'elle embrasse tout par une seule pensée infinie et éternelle. De plus, j'ignore ce que seront les siècles à venir, et s'il y aura toujours des siècles, s'il ne viendra pas un temps qui sera le dernier de la durée changeante, même pour les êtres intelligents et immortels, un temps au-delà duquel la vie bienheureuse ou malheureuse n'aura plus de variation, et sa durée n'aura plus de mesure. En un mot, pour résoudre cette difficulté, je ne connais assez ni Dieu, ni l'avenir. Je me récuse donc, non pas uniquement parce qu'il s'agit de l'infini et de Dieu, mais parce

Digitized by Google

qu'il s'agit de choses qui dépassent la portée de mon esprit, et dont je ne puis voir ni la contradiction ni l'accord [1]. »

M. Pillon, après avoir reproduit ce passage dans son *Année philosophique* de 1890, ne se déclare pas satisfait par ce double essai d'éclaircissement. Le premier moyen ne lui paraît même pas sérieux : « Quel que soit le mode de la connaissance divine, dit-il, ce qui est contradictoire, logiquement impossible, ne peut être l'objet de cette connaissance. » Cette réfutation ne nous semble pas convaincante, à l'égard du moins des phénomènes prédéterminés ; ces phénomènes, en effet, s'ils sont physiques, sont tous exprimés par des équations en nombre fini, du moment que l'univers l'est aussi ; rien n'empêche donc que ces équations soient toutes connues. Or, la connaissance de telles équations constitue, pour notre esprit lui-même, une connaissance implicite de tous les phénomènes qu'elles expriment quand on fait croître indéfiniment le temps ; quelque imparfaite que soit cette connaissance, il nous semble qu'elle permet d'entrevoir comment Dieu pourrait connaître un avenir infini sans avoir une idée distincte de chaque phénomène et sans que, par suite, l'infini numérique fût réalisé en sa pensée.

Les mêmes considérations s'appliquent évidemment au cas des phénomènes psychiques soumis au déterminisme ; mais il semble qu'il n'en est pas de même des actes libres et de tous les phénomènes qui en dépendent, en sorte que la croyance en la liberté exigerait le recours au second moyen d'explication du professeur de Rennes, c'est-à-dire à l'hypothèse d'un état final stable pour toutes les créatures. M. Pillon reconnaît que cette hypothèse est de nature à résoudre le problème ; mais il lui paraît difficile de concilier, en chacune des consciences immobilisées et devenues étrangères

1. *Les Sciences et la Philosophie*, p 321.

Digitized by Google

à la loi du temps, cette immobilité même avec la mémoire des faits passés qu'implique la responsabilité morale. Pour lui, d'ailleurs, la loi mentale du temps, ne pouvant se comprendre sans la distinction de l'avant et de l'après, renferme l'idée de l'avenir aussi bien que celle du passé, à quoi il ajoute que la mémoire du passé apporterait des faits toujours nouveaux dans les souvenirs et réintroduirait ainsi des variations mentales dans cet état prétendu stable.

Cette dernière réflexion nous surprend de la part de M. Pillon, car il est clair que l'hypothèse de la stabilité comprend l'absence de variation dans le souvenir des faits passés, absence qui ne saurait impliquer contradiction, puisque, en tous cas, les faits représentés seraient en nombre fini. Quant à la difficulté qu'il éprouve à concevoir un passé sans avenir, elle tient à la valeur beaucoup trop grande, selon nous, qu'il attribue à l'idée de temps; pour celui qui la réduit à celle de relation entre la cause occasionnelle et son effet, la série peut aboutir à un effet dernier.

Ainsi donc, le seul fait d'admettre l'existence d'actes libres, en même temps que la prescience divine, inséparable de l'immutabilité, oblige à admettre aussi la fin du temps [1]. Dès lors, la théorie causale de celui-ci ne se heurte plus à cette difficulté très grave, puisqu'on a déjà dû en prendre son parti ; une telle résolution n'a, d'ailleurs, rien que de parfaitement rationnel, puisque cette difficulté peut choquer certaines tendances plus ou moins instinctives, mais ne saurait faire apparaître aucune contradiction.

1. On pourrait croire, par suite, que la première hypothèse de Th.-Henri Martin, relative au mode de la pensée de Dieu, devient sans objet, et il en est bien ainsi si l'on n'envisage que l'ordre des choses contingentes; mais il reste celui des vérités nécessaires, des vérités mathématiques par exemple, qu'aucune intelligence temporelle ne saurait épuiser et qui dès lors ne

Digitized by Google

IV

LA MESURE DU TEMPS

Après avoir étudié le temps tel qu'il nous apparaît dans la mécanique, nous en avons soumis la notion à une critique qui nous a, semble-t-il, singulièrement éloigné de notre point de départ. Allons-nous donc, sous une forme un peu différente, revenir à la conclusion de ces philosophes qui, comme MM. Delbœuf et Bergson, distinguent deux temps, l'un pour la science et l'autre pour la réalité. Un tel dualisme nous répugne profondément, et nous ne saurions nous résigner que contraint et forcé à en reconnaître la légitimité. Or, ce par quoi une chose prend place dans la science, c'est par sa mesure, et, par suite, nous devons examiner si le temps, tel qu'il nous est finalement apparu, est susceptible de mesure, et, dans le cas de l'affirmative, si sa mesure peut être la même qu'au point de vue de la mécanique.

Or, Balmès a fort bien vu que l'idée proprement dite de mesure ne saurait être appliquée au temps, et qu'on ne peut songer qu'à *compter* les phénomènes successifs (voir p. 168 et 169). Cette simple opération se heurte à deux inconvénients : le premier consistant dans la difficulté de la réaliser, même sous une forme purement proportionnelle,

doivent subsister, dans la pensée divine, que sous une forme pour ainsi dire implicite, leur distinction sous notre forme ordinaire de théorèmes aboutissant à la contradiction du nombre infini.

Digitized by Google

et, le second, dans le fait que, si l'on considère deux séries différentes de phénomènes, mais reliées entre elles de façon à présenter des simultanéités, de la façon qui a été précédemment étudiée, les nombres ne semblent point devoir être proportionnels entre eux pour les diverses périodes correspondantes.

Si nous considérons un mouvement, on peut admettre qu'à deux déplacements égaux répondent des nombres de phénomènes égaux, nombres finis, puisque nous avons dû écarter la notion de mouvement continu. Sans connaître ces nombres, nous pouvons donc admettre que nous savons en déterminer le rapport; mais la plus complète incohérence apparaît entre les diverses séries de mouvements, puisque, si l'on considère deux déplacements égaux d'un mobile, les déplacements simultanés des autres mobiles ne sont presque jamais égaux entre eux. Nous avons vu par quel artifice on a prétendu éluder cette difficulté, en disant que deux temps sont égaux lorsqu'ils répondent à des espaces égaux parcourus par des mobiles placés dans des circonstances identiques; mais nous avons vu aussi que cette définition repose sur un cercle vicieux, l'identité des circonstances ne pouvant être établie qu'en vertu des lois de la mécanique, lois qui supposent la mesure du temps. Il résulte de là que les conceptions ordinaires du temps se heurtent, aussi bien que la nôtre, à d'inextricables difficultés, avec cette différence, toutefois, toute à notre avantage, que nous nions qu'il puisse y avoir, à proprement parler, une mesure du temps.

Il n'en reste pas moins vrai que l'on désigne, sous cette expression, une opération de la plus grande importance pour la vie pratique et pour la science; nous devons chercher à l'expliquer. Il peut sembler étrange de s'adresser aux phénomènes psychologiques, qui offrent les plus frappantes contradictions entre ce qu'on pourrait considérer comme les nombres d'états de conscience de deux hommes pen-

Digitized by Google

dant les mêmes temps, ces nombres ne paraissant aucunement proportionnels entre eux. Mais, au milieu de ce chaos, les phénomènes inférieurs, qui se rattachent, d'une façon plus intime à la vie corporelle, présentent certaines divisions d'une uniformité remarquable. La double alternative de la veille et du sommeil partage notre existence en périodes singulièrement analogues ; si ces périodes présentent d'énormes différences, au point de vue de nos états psychiques supérieurs, elles comprennent toutes une série de faits semblables dans lesquels s'encadrent les autres. C'est ainsi que les repas viennent couper régulièrement la veille, et que nous pouvons exécuter des travaux analogues dans les périodes correspondantes de deux jours différents. De tous ces faits, qui prêteraient à des développements étendus, résulte que nous sommes portés à former des groupes de ces états à peu près réguliers et à les dire égaux entre eux. Ensuite, les mouvements du soleil, qui président à ces phénomènes fondamentaux de notre existence, permettent de préciser davantage les limites des périodes égales et de les subdiviser autant qu'on veut. Mais alors la critique scientifique s'est déjà emparée de la question de la mesure du temps et amène à substituer les mouvements des étoiles fixes à ceux du soleil.

Ainsi se résolvent progressivement les difficultés que la théorie causale semblait opposer à la mesure du temps, et nous venons de voir comment elle conduit à la solution scientifique de la question tout aussi naturellement que quelque système que ce soit. Il nous semble même qu'elle a l'avantage de dissiper bien des nuages, en réduisant cette mesure à sa vraie signification. Le temps n'étant qu'une forme de notre sensibilité, qui revêt d'une apparence toute subjective la simple relation de cause occasionnelle à effet, il ne peut être question de le mesurer, au sens propre du terme, mais seulement de compter une série de phéno-

Digitized by Google

mènes; comme, d'ailleurs, il existe un nombre prodigieux de séries de ce genre dépendant les unes des autres, ce qui donne naissance à la notion de simultanéité, on se heurte à la difficulté que deux séries différentes ne fournissent pas des nombres proportionnels pour la mesure des diverses périodes. Mais le monde matériel obéit à des lois simples si l'on adopte un certain mouvement-unité, et cette adoption amène, sinon une régularité complète dans les phénomènes psychiques, du moins un ordre relatif entre ceux de ces phénomènes qui forment comme la base de notre vie. C'est là plus qu'on n'était en droit d'espérer, et ce que ce résultat offre d'imparfait n'a rien qui puisse surprendre.

Ainsi se trouve établi l'accord entre la conception philosophique du temps et les résultats de la science expérimentale; ainsi se trouve écarté ce véritable cauchemar d'un irréductible dualisme entre deux notions d'un même concept. Nous ne nous flattons pas d'avoir dissipé toutes les obscurités d'un tel sujet, et nous savons trop qu'une grande partie de nos lecteurs nous aura définitivement abandonné au moment où nous avons abordé la critique du nombre infini et du continu; nous souhaitons que, parmi ceux qui nous auront suivi plus loin, quelques-uns soient amenés à reprendre et à critiquer la théorie de Kant et de Balmès et ce que nous avons pu y ajouter; plus heureux que nous, peut-être, ils sauront tirer de cet ordre d'idées des clartés que nous n'avons pas su débarrasser des nuages qui l'enveloppent.

Quant à l'espace, hélas! nous n'avons même pas l'illusion d'avoir posé une hypothèse sur sa nature intime et, de ce que nous en avons dit, on pourrait bien plutôt tirer des conclusions sur ce qu'il n'est pas que sur ce qu'il est. Remuer ces idées n'est cependant peut-être pas œuvre tout à fait stérile, car on y acquiert, semble-t-il, une notion plus exacte du vrai caractère de cette belle science qu'on appelle la géo-

Digitized by Google

métrie, et, de la généralisation qu'elle a reçue en ce siècle, on la voit sortir, non point soumise à l'expérience comme l'ont cru plusieurs, mais plus rationnelle qu'elle n'était encore apparue sous la forme réduite qu'elle s'était laissé imposer par les apparences du monde extérieur.

FIN

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE PREMIER

L'ESPACE GÉOMÉTRIQUE

I

LES BASES DE LA DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

Énumération, 5. — Les définitions, 6. — Les principes d'identité, de contradiction et de raison suffisante, 7. — Les axiomes, 8. — Les postulats, 11.

II

LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Le postulatum d'Euclide, 13. — Son remplacement par le principe de la relativité des dimensions, 14. — Les définitions de M. Delbœuf, 15.

III

LA GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE

Généralisation de l'idée d'espace, 18. — Convenance d'étudier chaque espace en lui-même, puis dans des espaces d'ordre supérieur, 19. — Espaces à une dimension, 19. — Espaces à

Digitized by Google

deux dimensions, 20. — Définition des figures égales, 20. — Longueur et courbure des lignes, 25. — Définition des surfaces identiques à elles-mêmes et de leurs géodésiques, 25. — Différents genres de surfaces identiques, 27. — Les postulats d'Euclide, 28. — Multiplicité prétendue des postulats, 28. — Leur nécessité théorique d'après M. Renouvier, 29. — Discussion du postulat de la perpendicularité, 30. — Le plus court chemin, 31. — Euclidianisme des figures infiniment petites, 31. — Aire des polygones et des contours curvilignes, 32. — Les paramètres des divers espaces, 32. — Les trois surfaces identiques et leurs trigonométries, 33. — Étude des diverses surfaces dans un même espace à trois dimensions, 33. - Relativité du caractère de retournabilité, 34. — Espaces divers à trois dimensions, 34. — Les sphères considérées comme retournables (espaces de Riemann), 34. — Espaces de Lobatschewski, 37. — Surfaces identiques insérables dans chaque espace, 38. — Figures semblables, 38. — Intersections des espaces identiques, 39. — Le problème des figures symétriques, 40. — Notion générale des espaces géométriques et l'idée de continuité, 42.

IV

VALEUR DE LA GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE

Objection contre la valeur de toutes les géométries, 44. — Leur solidarité et le dictionnaire de M. Poincaré ; discussion de sa valeur, 45. — Valeur absolue des géométries, d'après MM. Calinon et de Tilly, 47. — Objection utilitaire, 50. — Théorie de l'intuition, d'après M. Delbœuf, et prétendu postulat résultant de la surabondance des définitions, 50. — Objections de l'abbé de Broglie (intuition, théories scolastiques, quantités imaginaires), 52. — Intuition synthétique (Ampère et M. Rabier), 56. — M. Renouvier et les jugements synthétiques *a priori*, 56.

V

PORTÉE PHILOSOPHIQUE DE LA GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE

Cette géométrie forme un ensemble harmonieux et rationnel, 60. — On en sort par une définition, un postulat ou un impératif, 61. — Elle fournit une réponse à l'empirisme, 62.

Digitized by Google

CHAPITRE II

LE TEMPS ET L'ESPACE EN MÉCANIQUE

I

CINÉMATIQUE

Définition, 65. — L'unité de temps, 66. — Choix arbitraire de temps égaux par définition, 66. — Mouvements-unités distincts ou non, 67. — Cinématique indépendante du temps, 67. — Les lois expérimentales dépendent du mouvement-unité, 68. — Cinématique indépendante du système d'axes, 69. — Les lois expérimentales en dépendent, 69. — Considérations historiques sur le choix des axes, 70. — Détails sur le choix des axes et du mouvement-unité, 72. — Question du mouvement et du temps absolus, 73. — Considérations sur la simplicité des lois de la nature, 74.

II

DYNAMIQUE

La masse, et non la force, constitue la notion nouvelle qui donne naissance à la dynamique, 79. — Loi de l'égalité de l'action et de la réaction, 80. — Elle dépend du choix des axes et du mouvement-unité, 81. — La masse en est indépendante, 81. — Partie apodictique et partie expérimentale de la dynamique, 81. — Caractère approximatif des lois de Képler expliqué, 82. — Question du mouvement et du temps absolus, discussion spéciale en ce qui concerne le temps, 83. — Axes et mouvement-unité théoriques, 86.

CHAPITRE III

LA GÉOMÉTRIE DE NOTRE UNIVERS

Réserve fondamentale sur le caractère approximatif des mesures, 88. — Existence de négations absolues de la possibilité d'interpréter nos sensations, 88. — Thèse de M. Calinon sur

Digitized by Google

l'entière indétermination des rayons lumineux, 89. — Moyen d'y échapper à l'égard du système solaire, 91. — Indiscernabilité absolue des systèmes isométriques, 92. — Intervention de la loi de la gravitation, 92. — Double cause de simplicité dans les formules, 93. — Extension des conclusions jusqu'aux étoiles les plus voisines, 94. — Une figure infiniment petite par rapport à l'espace auquel elle appartient n'est pas forcément euclidienne, 95. — Hypothèse de M. Poincaré sur la variation des instruments de mesure, 96. — Évanouissement de l'hypothèse des systèmes isométriques et de celle de M. Poincaré, 98. — Indépendance des constructions géométriques et des sensations, d'après M. Couturat, 99.

CHAPITRE IV

LES PROBLÈMES DES MONDES SEMBLABLES ET DE LA RÉVERSIBILITÉ DE L'UNIVERS

I

LE PROBLÈME DES MONDES SEMBLABLES

Position du problème, 102. — Solution générale, 103. — Objection vaine tirée des géométries non euclidiennes, 103. — Point de vue cinématique, 103. — Point de vue dynamique, 104. — Liaison erronée posée par Laplace entre la réponse au problème et la loi de la gravitation, 105. — Erreur fondamentale de MM. Delbœuf et Renouvier, 106. — Critique du *Mégamicros* de M. Delbœuf, 106. — Identité des conséquences de l'admission des qualités pures et de la répudiation de toute hypothèse sur la constitution de la matière, 111. — Discussion de la thèse de Laplace, par M. Renouvier, 111. — Solution de la difficulté, 113. — Variation des vitesses angulaires, 115. — Discussion contre M. Renouvier, 115, — et contre M. Delbœuf, 116. — Vérification par le calcul, 118. — Évanouissement de l'hypothèse de variations proportionnelles universelles, 119. — Phénomènes psychiques, 120. — M. Bergson et la durée réelle, 120. — Le sentiment du temps, 122.

Digitized by Google

II

LA RÉVERSIBILITÉ DU MONDE MATÉRIEL

La réversibilité résulte de l'hypothèse de forces indépendantes des vitesses, 124. — Solution de Philippe Breton et sa discussion par le P. Carbonnelle, 125. — Etude de la chute d'un corps et de ses suites, par ce dernier, 126. — Le démon de Maxwell, 128. — Instabilité des phénomènes révertis, 128. — Possibilité de distinguer le passé de l'avenir, 131. — Digression sur la réversibilité indirecte, 131. — Les mouvements cachés de Helmholtz, 131. — Forces fonctions des vitesses, 132. — Théorème de M. Poincaré sur le caractère périodique d'un monde où les forces sont indépendantes des vitesses, 132. — Monde moral, 134.

CHAPITRE V

CRITIQUE DE L'INFINI ET DU CONTINU. — LES ARGUMENTS DE ZÉNON D'ÉLÉE

I

CRITIQUE GÉNÉRALE

Contradiction enfermée dans la notion d'un nombre infini, 135. — Théorie de M. Milhaud, d'après laquelle les êtres peuvent ne pas former une totalité, 137. — Principe du nombre de M. Renouvier, 138. — Extension de la discussion au continu, 139. — Discontinuité du mouvement, 140. — Limitation de l'espace et du temps, première antinomie de Kant, 141. — Discontinuité du temps, 143.— Divisibilité à l'infini de l'espace et du temps, Boscovich et M. Evellin, 143.

II

LES ARGUMENTS DE ZÉNON D'ÉLÉE

Leur groupement, 148. — La *dichotomie* et l'*Achille*, 149. — Aristote et la distinction de l'acte et de la puissance, 150 — M. Noël et le devenir, 151. — La *flèche*, 153. — Le mouve-

Digitized by Google

ment considéré comme un état du mobile par M. Noël, 154. — Le *stade*, 156. — Réfutation par M. Evellin, 157. — Cet argument n'atteint pas notre thèse, 159. — Résumé, 160.

CHAPITRE VI

LA NATURE DU TEMPS

Insuffisance de la théorie de Leibniz sur l'espace et le temps, 161. — Théories de Boscovich et de M. de Vorges sur la nature de l'espace, 162.

I

LA CONCILIATION DE L'ÊTRE ET DU NON-ÊTRE COMME ORIGINE DU TEMPS

Indication contenue dans l'Analytique transcendentale, 164. — Difficultés de la question du temps, d'après Balmès, 164. — Le temps n'est rien sans les choses qui durent, 166. — Il est l'être et le non-être, 167. — Il exige des choses qui s'excluent, 167. — Réponse à une objection, 168. — La coexistence, 168. — — Dieu et le temps, 169. — Mesure du temps, 169. — Le temps et le principe de contradiction, 169. — Théorie de Balmès reprise par M. Boirac, 171. — Insuffisance de cette théorie, 172.

II

IDENTITÉ DE LA RELATION TEMPORELLE ET DE LA RELATION DE CAUSALITÉ OCCASIONNELLE

L'avant et l'après, d'après Guyau, 173. — La cause et le temps, d'après Hume, 174. — Énoncé de la théorie causale par Kant, 174. — Balmès ne l'a pas adoptée nettement, 174. — Objection fondée sur la réversibilité du monde matériel, 175. — Simultanéité non temporelle et simultanéité temporelle, 176. — La troisième analogie de Kant, 177. — Simultanéité directe et simultanéité indirecte, 178. — Effets prétendus simultanés à leurs causes, 178.

Digitized by Google

III

APPLICATIONS DIVERSES. — DIEU ET LE TEMPS

Divisibilité illimitée du temps, 179. — Relations temporelles d'univers distincts, 180. — Le passé et le futur pour l'intelligence divine, 183. — Pour les hommes, à une distinction rationnelle s'ajoute une forme de la sensibilité, 184. — Fin du temps et sa conciliation avec l'immortalité, 185. — La prescience divine exige cette fin ; Th.-Henri Martin et M. Pillon, 186.

IV

LA MESURE DU TEMPS

Faut-il distinguer un temps scientifique et un temps réel ? 190. — Mesurer le temps se réduit à compter des phénomènes, 190. — Difficulté commune à toutes les théories, 191. — Origine psychique de la mesure du temps, 191. — Comment on aboutit à la mesure scientifique, 192. — Conclusion, 192.

TABLE DES MATIÈRES..... 195

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Tours, imprimerie Deslis Frères, 6, rue Gambetta.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

RETURN TO▶ CIRCULATION DEPARTMENT
202 Main Library

LOAN PERIOD 1 **HOME USE**	2	3
4	5	6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS

Renewals and Recharges may be made 4 days prior to the due date.

Books may be Renewed by calling 642-3405.

DUE AS STAMPED BELOW

LIBRARY USE ONLY

SEP 13 1989

CIRCULATION DEPT.

FORM NO. DD6,

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

Digitized by Google

YB 22994

BD632
L4
104950

Digitized by Google

Digitized by Google